统计物理试题

2004．6．18

1．三维自由电子气体中，电子密度为n．

(1) 求费米能ε_{F}．

(2) 若气体温度为T，且$kT/\varepsilon_{\mathrm{F}} \sim 10^{-2}$，试判断玻耳兹曼统计是否近似适用于此系统．

(3) 将此系统置于弱磁场$\mathscr{B}$中，计入电子自旋磁矩在磁场中的取向能，但不计磁场对电子轨道运动的影响，证明零温电子气体由自旋引起的顺磁磁化强度为$\mathscr{M} = \dfrac{3}{2} n \mu_{\mathrm{B}} \left(\dfrac{\mu_{\mathrm{B}} \mathscr{B}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}} \right)$．

2．二维玻色气体的粒子能谱为$\varepsilon = \dfrac{p^2}{2m}$，粒子面密度为$n$．

(1) 计算态密度．

(2) 求温度为T时的化学势μ．

(3) 确定$\mu = 0$时的温度T_{c}，并说明此结果的物理意义．

3．某原子静止时辐射波长为λ_0的光．由该原子组成的气体发光时，由于热运动，每个原子都是运动光源，导致多普勒效应：当原子沿光传播方向的速度分量为v_x时，观察者实际测得的波长为$\lambda = \lambda_0 \left(1 - \dfrac{v_x}{c} \right)$，其中$c$为光速．

(1) 根据玻耳兹曼统计，导出温度为T时气体原子按速度分量v_x的概率分布．

(2) 多普勒效应引起光谱展宽．试证，光谱强度按波长的分布近似为
$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{mc^2}{2kT}\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \right)^2}.$$

(3) 求原子光谱的多普勒相对展宽$\sqrt{\overline{(\lambda - \lambda_0)^2}} \Big/ \lambda_0$．

（积分公式：$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$．）

统计物理试题答案与评分标准

1．（共 35 分）

(1) 计入自旋简并度，三维电子气体的态密度为

$$D(\varepsilon)=\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}.\text{（5 分）} \tag{1}$$

由零温费米分布，

$$\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\varepsilon^{1/2}\mathrm{d}\varepsilon=N.\text{（5 分）} \tag{2}$$

解得

$$\varepsilon_{\mathrm{F}}=\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}.\text{（5 分）} \tag{3}$$

(2) 由 $kT/\varepsilon_{\mathrm{F}}=T/T_{\mathrm{F}}\sim 10^{-2}$ 知，自由电子气体不满足弱简并性条件 $T\gg T_{\mathrm{F}}$，玻耳兹曼统计不适用．（5 分）

(3) 加外磁场后，自旋磁矩与之平行和反平行电子的能量分别为 $\varepsilon_-=\varepsilon-\mu_{\mathrm{B}}\mathscr{B}$ 和 $\varepsilon_+=\varepsilon+\mu_{\mathrm{B}}\mathscr{B}$，其中 ε 为平动能量；不同自旋的电子从各自最低能级开始，填充至费米能级 ε_{F}（对应的平动能分别为 $\varepsilon_{\mathrm{F}}+\mu_{\mathrm{B}}\mathscr{B}$ 和 $\varepsilon_{\mathrm{F}}-\mu_{\mathrm{B}}\mathscr{B}$）. 总粒子数 N 和电子自旋磁矩在磁场方向的总分量 M 分别为 $N=N_-+N_+$ 和 $\mu_M=\left(N_--N_+\right)\mu_{\mathrm{B}}$，其中自旋磁矩与磁场平行和反平行的总电子数为

$$\begin{aligned}N_{\mp}&=\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}\pm\mu_{\mathrm{B}}\mathscr{B}}\varepsilon^{1/2}\mathrm{d}\varepsilon=\frac{4\pi V}{3h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon_{\mathrm{F}}^{3/2}\left(1\pm\frac{\mu_{\mathrm{B}}\mathscr{B}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)^{3/2}\\&\approx\frac{4\pi V}{3h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon_{\mathrm{F}}^{3/2}\left(1\pm\frac{3\mu_{\mathrm{B}}\mathscr{B}}{2\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)\end{aligned}.\text{（5 分）} \tag{4}$$

根据上式，

$$n=\frac{N}{V}=\frac{8\pi}{3h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon_{\mathrm{F}}^{3/2},\text{（5 分）} \tag{5}$$

$$\mathscr{M}=\frac{\mu_M}{V}=\frac{8\pi}{3h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon_{\mathrm{F}}^{3/2}\left(\frac{3\mu_{\mathrm{B}}\mathscr{B}}{2\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)\mu_{\mathrm{B}}=\frac{3}{2}n\mu_{\mathrm{B}}\left(\frac{\mu_{\mathrm{B}}\mathscr{B}}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right).\text{（5 分）} \tag{6}$$

2．（共 35 分）

(1) 设系统面积为 A，则动量大小在 $\mathrm{d}p$ 范围内的量子态数为

$$\underline{\frac{A}{h^2}2\pi p\mathrm{d}p}.\text{（5 分）} \tag{7}$$

由 $\varepsilon=\dfrac{p^2}{2m}$，$2p\mathrm{d}p=\mathrm{d}p^2=2m\mathrm{d}\varepsilon$，代入(7)式，求得能量在 $\mathrm{d}\varepsilon$ 范围内的量子态数

$$\underline{D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{\pi A}{h^2}(2m)\mathrm{d}\varepsilon}\text{，（5 分）} \tag{8}$$

即二维系统态密度 $D(\varepsilon)=\dfrac{\pi A}{h^2}(2m)$.

(2) 根据玻色分布，温度为 T 时，能量为 ε 的一个量子态上的平均粒子数为 $f=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/kT}-1}$. 化学势由

$$\underline{\frac{\pi A}{h^2}(2m)\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/kT}-1}=N}\text{（5 分）} \tag{9}$$

决定. 利用 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\int\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$，积分后得到

$$\underline{\mu=kT\ln\left(1-\mathrm{e}^{-nh^2/2\pi mkT}\right)}.\text{（10 分）} \tag{10}$$

(3) 由(10)式可见，$\mu=0$ 时的温度为

$$\underline{T_{\mathrm{c}}=0}\text{，（5 分）} \tag{11}$$

表明<u>二维玻色系统在有限温度下无玻色－爱因斯坦凝结现象</u>.（5 分）

3．（共 30 分）

(1) 根据玻耳兹曼分布，原子动量在 $\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z$ 范围内，位置在 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 范围内的概率为

$$\underline{\frac{\mathrm{e}^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mkT}}\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\mathrm{e}^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mkT}}\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z\iiint\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}}.\text{（5 分）} \tag{12}$$

上式对位置及除 p_x 外的其他动量分量积分，并将变量 p_x 变换为 v_x，得到

原子按速度分量 v_x 的概率分布

$$\underline{P(v_x)\mathrm{d}v_x=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\mathrm{d}v_x}.\text{（5 分）}\tag{13}$$

(2) 由多普勒频移公式得 $v_x=-c\left(\dfrac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}\right)$，代入(13)式，可得原子按发光实测波长 λ 的概率分布

$$\underline{P(\lambda)\propto\mathrm{e}^{-\frac{mc^2}{2kT}\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}\right)^2}}.\text{（5 分）}\tag{14}$$

上式是以 λ_0 为中心的狭窄分布，因此可以忽略光子能量的变化，认为光强分布近似正比于光子数分布，亦即正比于发光原子数的波长分布. 根据(14)式，取中心光强为 I_0，则有

$$\underline{I=I_0\mathrm{e}^{-\frac{mc^2}{2kT}\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}\right)^2}\propto P(\lambda)}.\text{（5 分）}\tag{15}$$

(3) 由于

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}\right)^2}&=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}\right)^2 I(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\int_{-\infty}^{+\infty}I(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\\&=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{v_x}{c}\right)^2 P(v_x)\mathrm{d}v_x}{\int_{-\infty}^{+\infty}P(v_x)\mathrm{d}v_x}=\frac{\overline{v_x^2}}{c^2}\end{aligned}\text{，（5 分）}\tag{16}$$

能均分定理又给出 $\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}=\frac{1}{2}kT$，所以多普勒相对展宽

$$\underline{\sqrt{\overline{\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}\right)^2}}=\sqrt{\frac{kT}{mc^2}}}.\text{（5 分）}\tag{17}$$

此结果亦可由(16)式通过积分直接计算得到.