第 **9** 次课 **(**刚体的转动运动**) 9** 月 **30** 日

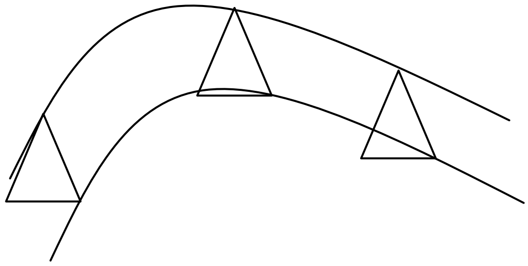
Chapter 8　　Rotational Kinematics

转动运动

一个物体或多质点系统，如果物体上任意两点或质点系中任意两个质点间的间距在运动中保持不变 ⟶ 该物体或质点系 ⟶ **刚体**

刚体运动

刚体上	平动	一般运动
任一点轨迹	相同	不同
任一直线	平行	不平行



平动刚体 ⟶ 简化成一个质点

刚体一般运动 ⟶ 某点运动 ＋ 绕该点的转动

描述<u>转动的物理量</u>(角变量)　　平动物理量(线变量)

$\Downarrow$

角位移 $\Delta\varphi$　　$\leftrightarrow$　　$\vec{r}$

角速度 $\vec{\omega}$　　$\leftrightarrow$　　$\vec{v}$

角加速度 $\vec{\alpha}$　　$\leftrightarrow$　　$\vec{a}$

力矩 $\vec{\tau}$　　$\leftrightarrow$　　$\vec{F}$

角动量 $\vec{L}$　　$\leftrightarrow$　　$\vec{p}$

转动惯量 I　　$\leftrightarrow$　　M

……　　……

一个刚体或质点系在空间几何位移的确定所需要$\underbrace{\text{独立坐标变数的个数}}_{\text{自由度}}$

	自由度	约束条件
一个质点：	3　(x_1, y_1, z_1)	平面运动:自由度为 2 (x_1, y_1)，直线：1
两个质点：	3 + 3 = 6 $\begin{cases}(x_1, y_1, z_1)\\(x_2, y_2, z_2)\end{cases}$	两质点间的间距不变： 自由度 6 - 1 = 5 $l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

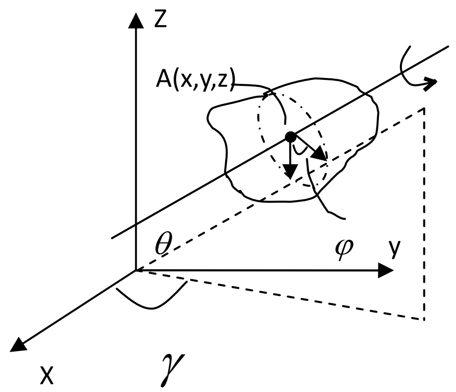
三个质点： ……	$3\times3=9\begin{cases}(x_1,y_1,z_1)\\(x_2,y_2,z_2)\\(x_3,y_3,z_3)\end{cases}$	两两间距不变的约束条件 3 个 自由度 9 − 3 = 6
N 个质点：	$3N\begin{cases}(x_1,y_1,z_1)\\ \cdots\cdots \\(x_N,y_N,z_N)\end{cases}$	$\underbrace{\text{所有点间距不变}}_{\text{刚体}}$：约束条件$3N-6$ $\|\|$ $3+3(N-3)$ 其他点 三个不共线点确定，刚体位形确定 $\Rightarrow$ 自由度为$3N-(3N-6)=6$

描述空间刚体的位形最多需要 6 个自由度：

三个平移坐标 (x,y,z)

两个转轴空间方位坐标 (θ,γ)

一个绕转轴转动角的坐标 (φ)



		自由度	
刚体运动形式：	1) 平动	3	(质点运动)
	2) 定轴转动	1	(转动坐标变数)
	3) 平面运动	3	(两个平动 + 一个转动)
	4) 定点转动	3	(三个转动)
	5) 一般运动	6	(某点平动 3 个 + 绕该点转动三个)

转动变量： 角位移：$\Delta\varphi$ $\rightarrow$ 不是矢量 —— 因为 $\Delta\varphi_1+\Delta\varphi_2\neq\Delta\varphi_2+\Delta\varphi_1$

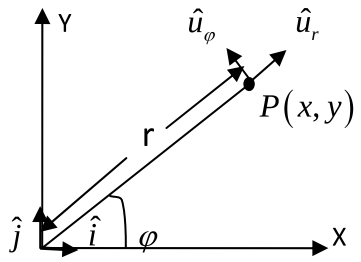
但 $d\varphi_1+d\varphi_2=d\varphi_2+d\varphi_1$

角速度：$\bar{\omega}=\dfrac{d\bar{\varphi}}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ $\longrightarrow$ $\bar{\omega}$方向右手定则

角加速度：$\bar{\alpha}=\dfrac{d\bar{\omega}}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t}$

定轴转动线变量与角变量关系

平面空间任一点 P，位置确定可以分别用 $\left.\begin{array}{l} 直角坐标\quad P(x,y) \\ \\ 极坐标\quad P(\gamma,\varphi) \end{array}\right\}$ 表示，如图



即 $\vec r = \left\{\begin{array}{ll} x\hat i + y\hat j & 直角坐标 \\ r\hat u_r & 极坐标 \end{array}\right\}$ 不同点在于极坐标中单位矢量是变量，是 φ 的函数，而直角坐标的单位矢量是常矢量

$$\hat u_r = \cos\varphi\hat i + \sin\varphi\hat j \qquad \frac{d\hat u_r}{dt} = \omega\hat u_\varphi$$

$$\hat u_\varphi = \sin\varphi\hat i + \cos\varphi\hat j \qquad \frac{d\hat u_\varphi}{dt} = -\omega\hat u_r$$

	直角坐标	极坐标
位置矢量：	$\vec r = x\hat i + y\hat j$	$r\hat u_r$
速度：	$\vec v = v_x\hat i + v_y\hat j$	$\vec v = v_r\hat u_r + r\omega\hat u_\varphi$ v_r：径向分量　$r\omega$：切向分量
加速度：	$\vec a = a_x\hat i + a_y\hat j$	$\vec a = \underbrace{\left(a_r - r\omega^2\right)}_{径向分量}\hat u_r + \underbrace{\left(2v_r\omega + r\alpha\right)}_{切向分量}\hat u_\varphi$

a_r：径向加速度　　$r\alpha$：角加速度引入切向加速度

$-r\omega^2$：向心加速度　　$2v_r\omega$：径向运动引入切向加速度

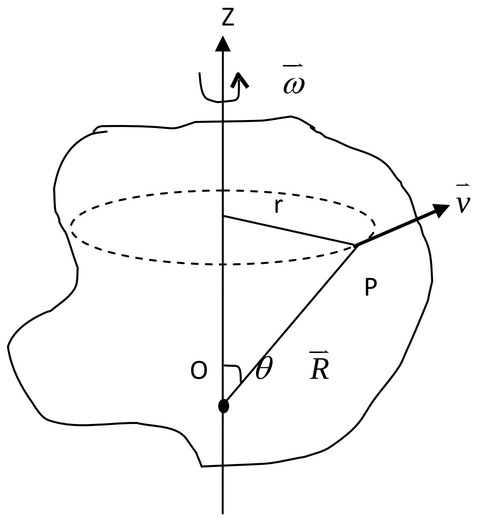
→ 科里奥力相关项

对于刚体：$a_r = 0$，匀速转动　$\alpha = 0$

$$v_r = 0$$

向心加速度：$\vec a = -r\omega^2\hat u_r = \dfrac{{v_T}^2}{r}\hat u_r \qquad r\omega = v_r$

定轴转动角变量与线变量更一般形式



刚体任意一点 P 的位矢 $\vec{R}$，相对原点 O

P 点：$\vec{v} = r\omega\hat{u}_\varphi$

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{u}_r + r\alpha\hat{u}_\varphi$$

$$\because R\sin\theta = r \quad \therefore \vec{v} = R\omega\sin\theta\hat{u}_\varphi = \vec{\omega}\times\vec{R}$$

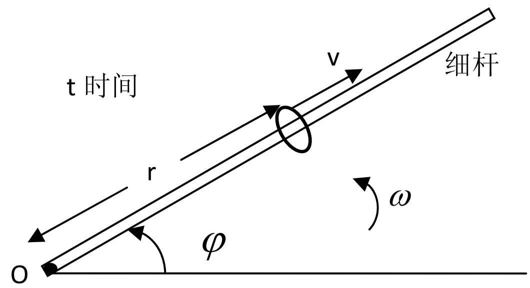
$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)}_{\text{径向分量}-r\omega^2} + \underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{R}}_{\text{切向分量}r\alpha}$$

例题：

细杆匀角速率 ω 旋转

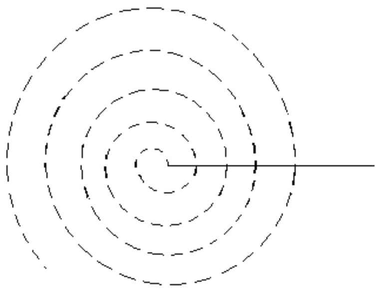
杆上有一小环匀速 v_r 沿杆向外滑动.

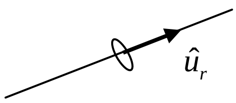
$t=0$ 时，环位于原点 O



1. 证明：小环的运动轨迹为阿基米德螺线
2. 试求小环任意时刻的速率和加速度
3. 定性画出小环的加速度和速度的方向 φ

解：1. $$\left.\begin{aligned} r(t) &= v_r t \\ \varphi(t) &= \omega t \end{aligned}\right\} \quad r(t) = \underbrace{\frac{v}{\omega}}_{\text{const}}\varphi(t)$$





2. $\vec{r}(t) = r(t)\hat{u}_r$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt}\hat{u}_r + r(t)\omega\hat{u}_\varphi$$

$$= \underline{\underline{v_r\hat{u}_r}} + \underline{\underline{r\omega\hat{u}_\varphi}}$$

刚体没有　　v_T 切向分量

$$v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_T}^2} = \sqrt{{v_r}^2 + {v_r}^2 t^2\omega^2} = v_r\sqrt{1+\omega^2 t^2}$$

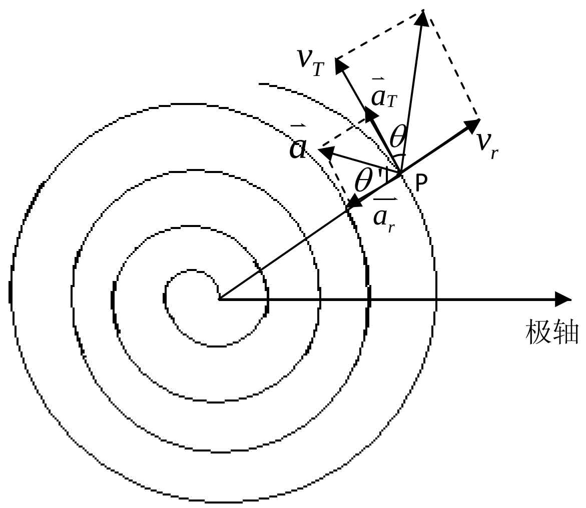
$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\underbrace{\frac{dv_r}{dt}}_{=0}\hat{u}_r+v_r\underbrace{\frac{d\hat{u}_r}{dt}}_{=\omega\hat{u}_\varphi}+\underbrace{\frac{dr}{dt}}_{=v_r}\omega\hat{u}_\varphi+r\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{=0}\hat{u}_\varphi+r\omega\underbrace{\frac{d\hat{u}_\varphi}{dt}}_{=-\omega\hat{u}_r}$$

$$=v_r\omega\hat{u}_\varphi+v_r\omega\hat{u}_\varphi+\left(-r\omega^2\right)\hat{u}_r$$

$$=2v_r\omega\hat{u}_\varphi-v_r t\omega^2\hat{u}_r$$

$$a(t)=v_r\omega\sqrt{4+\omega^2t^2}$$

3.



$$\tan\theta=\frac{v_r}{v_T}=\frac{v_r}{v_T\omega t}\xrightarrow{t\to\infty}0$$

$$\tan\theta'=\frac{a_T}{a_r}=\frac{2v_r\omega}{-v_r t\omega^2}=\frac{2}{-\omega t}$$

$$\theta\neq\theta'$$