第 25 次课　受迫振动_共振_Q值_2007.12.5

	方程	解
简谐振动：	$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0$$	$x=x_m\cos\left(\omega_0t+\varphi\right)$ $\begin{pmatrix}x_m\\\varphi\end{pmatrix}$主要由初始条件决定，$\omega_0$由系统参数决定
阻尼简谐振动：	$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$	$x=x_m'\cos\left(\omega't+\varphi'\right)$ $\begin{pmatrix}x_m'\\\varphi'\end{pmatrix}$主要由条件决定，$\omega'$由系统参数决定 $\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$
受迫振动： (简谐驱动力)	$$\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x}_{\text{左边也应是简谐的}}=\underbrace{f_m\cos\omega t}_{\text{右边是简谐的}}$$	$x=\underbrace{x_m'e^{-\delta t}\cos\left(\omega't+\varphi'\right)}_{\text{暂态解}}+\underbrace{x_m\cos\left(\omega t+\varphi\right)}_{\text{稳态解}}$ 振幅　$x_m=\dfrac{f_m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta\omega^2}}$ 初相　$\tan\varphi=\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

$f_m=\dfrac{F_m}{m}$　　$F_m\cos\omega t$　简谐驱动力　ω与ω_0(固有频率)　不同

讨论：驱动力频率ω与固有频率ω_0的关系

1) 当$\omega\ll\omega_0$（低频$\longrightarrow$静态），$x_m=x_{m0}\approx\dfrac{f_m}{\omega_0^2}=\dfrac{F_m}{k}$

$$\left.\begin{array}{l}x_m=x_{m0}\approx\dfrac{f_m}{\omega_0^2}=\dfrac{F_m}{k}\\ \omega\to0\qquad\varphi=0\end{array}\right\}\text{与驱动力同相振动}$$

声学

在低频驱动力作用下，系统以驱动力的频率同相振动，此时物体的速度$\dfrac{dx}{dt}$与加速度$\dfrac{d^2x}{dt^2}$很小　$\longrightarrow$　趋近零

$$\underset{\downarrow \atop 0}{\frac{d^2x}{dt^2}} + \underset{\downarrow \atop 0}{2\delta\frac{dx}{dt}} + \underbrace{\omega_0^2 x}_{\text{弹性恢复力}/m} = \underbrace{f_m\cos\omega t}_{\text{驱动力}/m}$$

$\rightarrow$ 驱动力与弹性恢复力平衡

振幅 x_m 是在 F_m 的作用下最大的静伸长

2) 当 $\omega \gg \omega_0$（高频） $x_m = x_{m\infty} \approx \frac{f_m}{\omega^2} \rightarrow 0$

$\omega \rightarrow \infty \quad \varphi = \pi$

光学

振幅小，反相振动 $\rightarrow$ 驱动与位移总是反相导致速度小，但加速度不小

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underset{\downarrow \atop 0}{2\delta\frac{dx}{dt}} + \underset{\downarrow \atop 0}{\omega_0^2 x} = f_m\cos\omega t \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = f_m\cos\omega t \qquad x = \frac{f_m}{\omega^2}\cos(\omega t + \pi)$$

3) 当 $\omega = \omega_0$（共振） $x_m = x_{mr} \approx \frac{f_m}{2\delta\omega_0} = \frac{x_{m0}}{2\delta/\omega_0} = x'_{m0}Q \qquad Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$

$\downarrow$

品质因数

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x}_{=0} = \underbrace{f_m\cos\omega_0 t}_{\text{驱动力}} - \underbrace{2\delta\frac{dx}{dt}}_{\text{阻尼力}} \rightarrow 0$$

驱动力 = 阻尼力 $\Longrightarrow$ 输入的能量 = 耗散能量 振幅增大到静伸长的 Q 倍

共振的条件：外界驱动力的频率 ω 等于系统的固有频率 ω_0 $\quad \omega = \omega_0$

共振时：

开始振幅小 $\rightarrow$ 速度小 $\rightarrow$ 阻尼小 $\rightarrow$ 驱动力大 $\rightarrow$ 振幅 $\uparrow$ $\rightarrow$ 速度 $\uparrow$ $\rightarrow$ 阻尼 $\uparrow$ $\rightarrow$ 振幅 $\downarrow$

达到平衡：输入能量 = 耗散能量

从以上的分析中要充分理解物理—数学的关系，老物理学家的故事

问题：如果没有阻尼，$\omega = \omega_0$ 将发生什么？

品质因数Q

阻尼振动的能量（机械能）：$E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$=\frac{1}{2}kx_m'^2\cos^2\left(\omega't+\varphi'\right)+\frac{1}{2}m\omega'^2x_m'^2\sin^2\left(\omega't+\varphi'\right)$$

δ 较小， $\omega'\approx\omega_0$

$$\approx\frac{1}{2}\underbrace{kx_m'^2e^{-2\delta t}}_{\text{振幅平方}}$$

振子能量不再守恒，随时间指数衰减。在一个振动周期$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$内，损失的能量ΔE与E之比的2π倍为品质因数

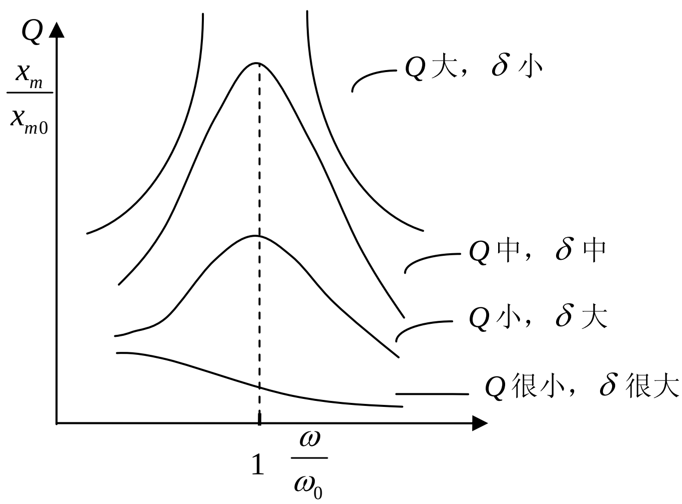
$$Q=2\pi\frac{E}{\Delta E}$$

E：储存能量

ΔE：振动一次损失的能量

$$=\frac{\omega_0}{2\delta}$$

δ 越小，Q 越大，振动时间或次数越多，越接近理想谐振



Q品质因数越高，共振时能量越大，振幅越大

共振的应用： $\omega=\omega_0$ $\quad\delta\ll\omega_0$

1) 荡秋千
2) 收音机、电视、手机、调谐（共振）
3) 核磁共振

……

Q越大，谐振越好 电容，电感等电子元器件也有Q值