第 18 次课 (“离心力”公式，地月验证，椭圆轨道问题，G，球壳定理) 2007.11.9

上节课介绍了发现牛顿万有引力定律的三个重要历史人物

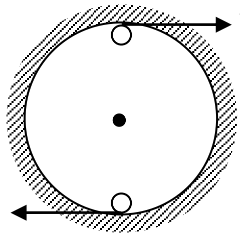
和开普勒行星运动的三个定律

以及用牛顿离心力公式＋开普勒第三定律 $\longrightarrow$ 引力 $\propto \dfrac{1}{r^2}$

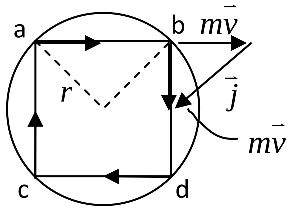
在当时还不清楚什么是向心力公式的条件下，牛顿推导出了“离心力”定律（公式）

推导离心力公式：(1664-65)

牛顿认为在圆形轨道上运行的物体如同物体(小球)约束在空心圆形器壁上的运动，如图所示。小球虽然约束在圆形内壁上圆形轨道运动，但由于有离心趋势(直线匀速运动，惯性)，因而对容器产生了“离心”的作用力



首先牛顿把圆形轨道的圆周运动简化为小球在圆形器壁内接四边(正方)形的运动，运动一周小球有四次碰壁，每次碰壁的冲量为 j，动量为 $p = mv$，如图所示 $j : mv = ab : r$



一周的总冲量：$J = 4j$ $\qquad J : mv = \underbrace{4ab}_{\text{四边形的周长}=S} : r$

$J \downarrow FT$

FT：离心力　作用时间

$$\frac{FT}{mv} = \frac{S}{r}$$

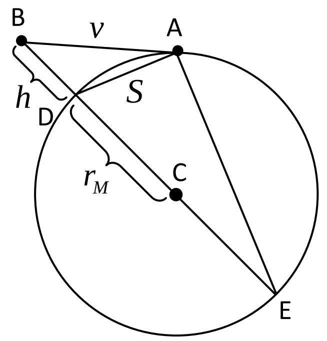
当内接正多边形的边数趋于 ∞ 极限：$\begin{cases} S = 2\pi r \\ T = \dfrac{S}{v} \end{cases}$

$$F = \frac{Smv}{rT} = m\frac{v^2}{r}$$

引力是距离的平方反比规律，怎样验证天上行星受到的引力与地面上的重力是来源同一力？

地月验证：(1669)

月球在牛顿看来是不断向地球“下落”而运动在一个圆形的轨道上。如果地面上的重力和月球受的力都遵循 $\frac{1}{r^2}$ 定律，则月球和地面上物体每秒下落的距离与各自到地球中心的距离有关。



位于 A 点的月球在 1 秒钟的时间里运动到：

若没有引力：B 点　$BA = v = \frac{2\pi r_M}{T}$

实际到达：　D 点

BD 为月球的“下落”距离　h

$BE = BD + h \approx ED = 2r_M$

$\because$　$\Delta ABD \sim \Delta EBA$　　$\therefore$　$\frac{BE}{BA} = \frac{BA}{BD}$

($BE \approx 2r$, $BA = \frac{2\pi r_M}{T}$, $BD = h$)

月球 1 秒下落的距离：$h = \frac{2\pi^2 r_M}{T^2}$　　当时已知 r_M 是地球半径 r_E 的 60 倍

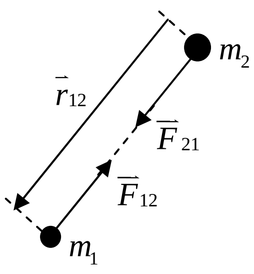
在地球表面上 1 秒时间内下落的距离为 g

1669 年：由 $\frac{1}{r^2}$ 规律，预计 $\frac{h}{g} = \frac{a_M}{a_E} = \frac{F_M}{F_E} = \left(\frac{r_E}{r_M}\right)^2 = \left(\frac{1}{60}\right)^2 = \frac{1}{3600} \approx 2.8 \times 10^{-4}$

但实际 $\frac{h}{g} = \frac{120\pi^2 r_E}{T^2 \cdot g} \approx \frac{1}{4100} \approx 2.4 \times 10^{-4}$　有14% 的误差

1682 年：r_E 精确数据：$\frac{h}{g} \approx 2.8 \times 10^{-4}$

万有引力定律矢量表示：

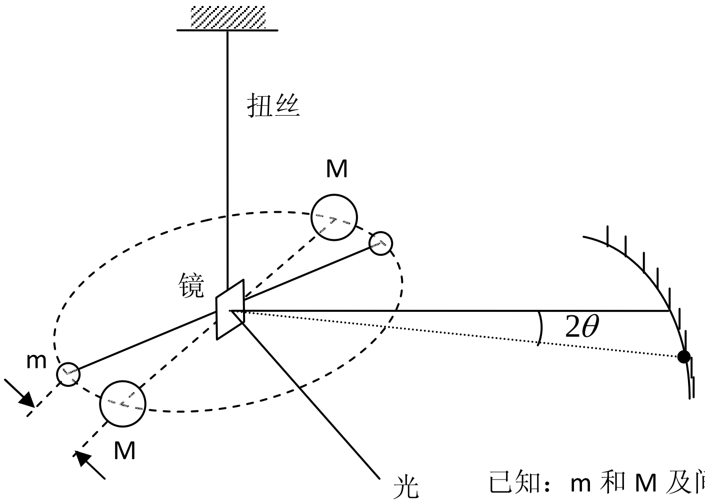


2 对 1 的作用力　$\overline{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$　　$\hat{r}_{12}$ 单位矢量　$2 \to 1$ 指向

1 对 2 的作用力　$\overline{F}_{21} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$　　$\hat{r}_{21}$ 单位矢量　$1 \to 2$ 指向

万有引力常数：

1798 年　卡文迪什第一个测得 G　(第一个测量地球的人)



已知：m 和 M 及间距
由扭转角 $\theta \to$ 力

$$G = 6.75\times10^{-11}\, N\cdot m^2/kg^2$$

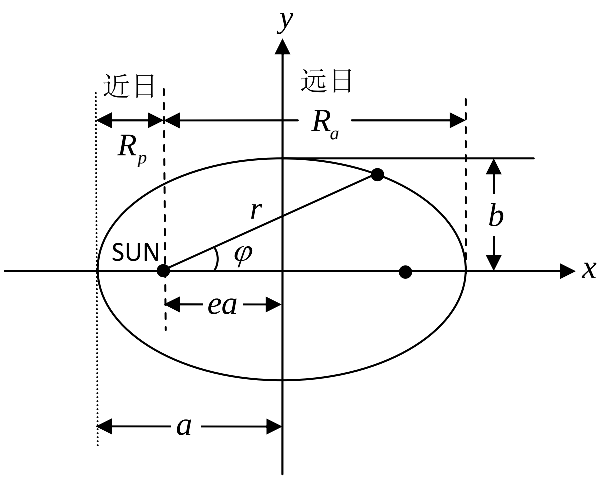
200 年后：$G = 6.67\times10^{-11}\, N\cdot m^2/kg^2 \pm 0.0010\times10^{-11}$

相对误差大约：±0.15%

反射镜技术近 200 年后的最新应用 STM 或 AFM

椭圆轨道问题 $\to \dfrac{1}{r^2}$　？

预备知识：椭圆方程



xy 坐标：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

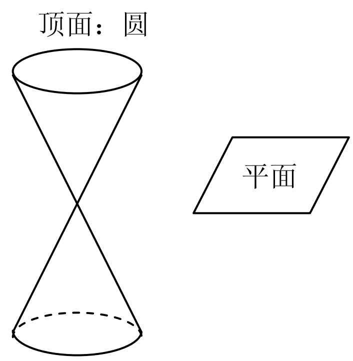
极坐标：

$$r = \frac{r_0}{1-e\cos\varphi}\quad \begin{cases} r_0 = \dfrac{b^2}{a} \\ e：偏心率\quad 0<e<1 \\ b = a\sqrt{1-e^2} \end{cases}$$

椭圆面积：$A = \pi ab$

$$\left.\begin{array}{ll} e=0 & \text{圆} \\ 0<e<1 & \text{椭圆} \\ e=1 & \text{抛物线} \\ e>1 & \text{双曲线} \end{array}\right\} \text{圆锥曲线}$$

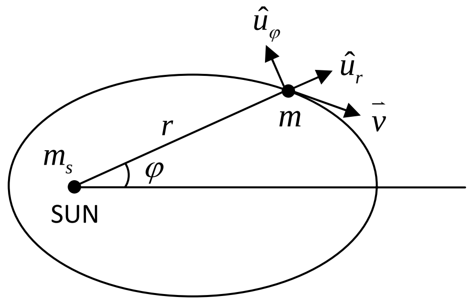
平面与圆锥的截线



$$\vec{r}=r(t)\hat{u}_r$$

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}(t)=\dot{r}\hat{u}_r+r\dot{\varphi}\hat{u}_\varphi$$

$$(\dot{r}=v_r\,,r\dot{\varphi}=v_\perp)$$



$$\dot{\hat{u}}_r=\omega\hat{u}_\varphi$$

$$\dot{\hat{u}}_\varphi=-\omega\hat{u}_r$$

功能定理：$dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}=Fdr=dK$

$$F=\frac{dK}{dr}=\frac{dK}{dt}\Big/\frac{dr}{dt}=\frac{\dot{K}}{\dot{r}}$$

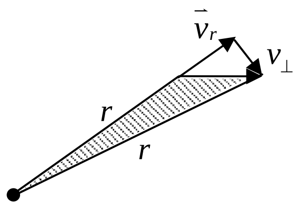
动能：$K=\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)$

1) 开普勒第一定律： $r=\dfrac{r_0}{1-e\cos\varphi}$

$$\dot{r}=-\frac{r^2}{r_0}e\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

2) 开普勒第二定律： $\frac{1}{2}v_\perp r=\dot{S}=\frac{1}{2}C$

$r\dot{\varphi}$ 单位时间内矢径扫过的面积



$$\dot{\varphi}=\frac{C}{r^2}$$

$\dot{r}$，$\dot{\varphi}$ 代入：$K=\frac{1}{2}mC^2\left(\frac{e^2\sin^2\varphi}{r_0^2}+\frac{1}{r^2}\right)$ $\qquad \dot{K}=\frac{1}{2}mC^2\left(\frac{2e^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}}{r_0^2}-\frac{2}{r^3}\cdot\dot{r}\right)$

$$F=\dot{K}/\dot{r}=-\frac{mc^2}{r_0}\cdot\frac{1}{r^2}$$

3)　开普勒第三定律：$\frac{a^2}{T^2}=k$ (常数，与 m 无关，但与 m_s 有关)

面积

$$T=\frac{A}{\dot{S}}=\frac{\pi ab}{C/2}=\frac{2\pi ab}{C}$$

$$C=\frac{2\pi ab}{T}$$

$$F=-m4\pi^2\frac{a^2b^2}{T^2}\cdot\frac{a}{b^2}\cdot\frac{1}{r^2}=-m4\pi^2\frac{a^3}{T^2}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$=\frac{4\pi^2 mk}{r^2}=-G\frac{m_s m}{r^2}$$

$$G=\frac{4\pi^2}{m_s}k$$ (与 m_s 无关的常数)

解决椭圆轨道问题。

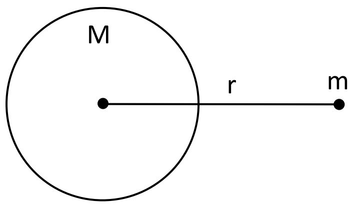
问题：近月制动（嫦娥卫星）？

万有引力定律的推论

两个球壳定理

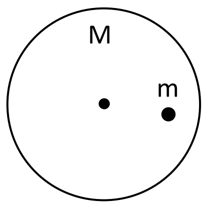
匀质球壳

定理 1：



$$F=-G\frac{mM}{r^2}$$

定理 2：



$$F=0$$

具体证明详见讲义