第 **24** 次课　相位_振动合成_阻尼振动_**2007.11.30**

上次**简谐振动**　微分方程：$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$

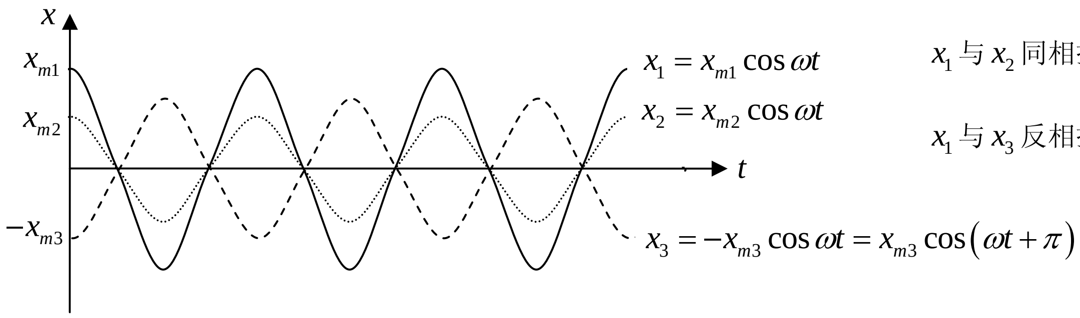
解　：$x=x_m\cos(\omega t+\varphi)$

$\begin{pmatrix} x_m \\ \varphi \end{pmatrix}$由初始条件决定，$\omega$ 由系统参数决定

x_m　振幅，$\omega t+\varphi$ 相角或相位，φ 初相角，初相位

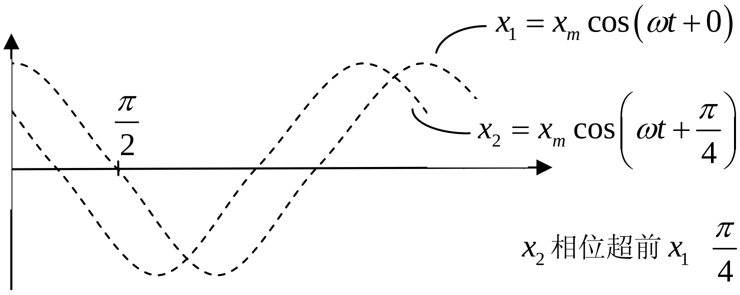
"相位"：是描述振动和波动最重要物理量，不同的位相表明振动处于不同的振动状态。

若两个振动处于相同的相位，表明两个振动在任意时刻都处于相同的状态，比如它们同时到达极大或极小。



x_1 与 x_2 同相振动

x_1 与 x_3 反相振动



x_2 相位超前 x_1　$\dfrac{\pi}{4}$

对于两个同频率，但初相角不同的振动　$\begin{cases} x_1=x_{m1}\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2=x_{m2}\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$　$0<\begin{matrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{matrix}<2\pi$

x_1，x_2 振动分别在时间 t_1 和 t_2 达到相同的振动状态，则　$\omega t_1+\varphi_1=\omega t_2+\varphi_2$

$\Delta t=t_2-t_1=-\dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$　　$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$

若 $\Delta\varphi>0$，即 $\varphi_2>\varphi_1$，则 x_2 领先 x_1　$\Delta\varphi$ 相位

因为 $\Delta\varphi>0$，$\Delta t=t_2-t_1<0$　$\to$　$t_2<t_1$，说明 x_1 比 x_2 落后了 Δt 时间到达这一状态

更为直观的方法——**矢量法**：可以直观地领会简谐振动中 x_m，ω，φ 的意义，为振动叠加提供简便方法。

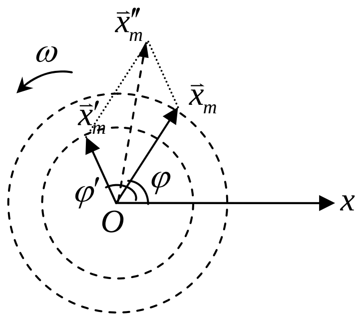
对 $x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$ 和 $x' = x'_m \cos(\omega t + \varphi')$

设想一个大小为 x_m 的矢量 $\vec{x}_m$ 绕其原点 O 以 ω 的角速率逆时针转动，如图所示：

x'_m $\vec{x}'_m$

$t = 0$ 时刻，矢量与极轴夹角为 φ，t 时刻 $\omega t + \varphi$

φ' $\omega t + \varphi'$



两个矢量 $\vec{x}_m$ 和 $\vec{x}'_m$ 在 x 轴投影表示

两个简谐振动 $\begin{cases} x = x_m \cos(\omega t + \varphi) \\ x = x'_m \cos(\omega t + \varphi') \end{cases}$

从图中看出，$\varphi' > \varphi$，同时 x' 振动在前，x 振动在后

$$x + x' = x'' = x''_m \cos(\omega t + \varphi'') = x_m \cos(\omega t + \varphi) + x'_m \cos(\omega t + \varphi')$$

振动的合成与叠加

$$x = x_1 + x_2 = x_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) + x_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

与相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 有关，$|\Delta\varphi| < \pi$

1. **同频率、同方向简谐振动的合成** $\Longrightarrow$ 还是一个同频率、同振动方向的简谐振动，振幅发生变化，初相位可能发生变化。

   1) 同相：$\Delta\varphi = 0$ 或 $2n\pi$

   $$x = (x_{m1} + x_{m2}) \cos(\omega t + \varphi)$$

   2) 反相：$\Delta\varphi = \pi$ 或 $(2n+1)\pi$

   $$x = (x_{m1} - x_{m2}) \cos(\omega t + \varphi)$$

   3) x_2 领先：$\Delta\varphi > 0$　x_2 位相比 x_1 位相大，先于 x_1 达到某一状态

   落后：$\Delta\varphi < 0$

2. 同频率的振动方向相互垂直的简谐振动合成 $\begin{aligned} x &= x_m \cos\left(\omega t + \varphi_1\right) \\ y &= y_m \cos\left(\omega t + \varphi_2\right) \end{aligned}$

1) 同相：$\Delta\varphi = 0$　合成一个新的方向固定的简谐振动

2) 反相：$\Delta\varphi = \pi$　合成一个新的方向固定的简谐振动

3) $0 < \Delta\varphi < \pi$，合成的简谐振动方向不固定，振动轨迹是一个椭圆

3. 不同频率、相同振动方向的简谐振动的合成

$$x = x_m \cos\left(\omega_1 t + \varphi\right) + x_m \cos\left(\omega_2 t + \varphi\right) = 2x_m \cos\underbrace{\frac{\Delta\omega}{2}}_{\text{拍频}} t \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi\right)$$

4. 不同频率、振动方向相互垂直的简谐振动合成："李萨如曲线"

相位不同——合成的振动完全不同！

简谐振动的能量：$x = x_m \cos\left(\omega t + \varphi\right)$

$v_x = -\omega x_m \sin\left(\omega t + \varphi\right)$

$a_x = -\omega^2 x_m \cos\left(\omega t + \varphi\right)$

x 与 a_x 同相：同时最大，同时最小

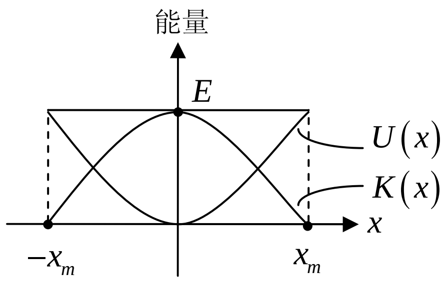
x 与 v_x 相位相差 $\frac{\pi}{2}$：一个最大，另一个为零

机械能

$$\text{弹簧—物块:}\begin{cases} \text{势能}\quad U = \frac{1}{2}kx^2 \\ \text{动能}\quad K = \frac{1}{2}mv_x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad E = K + U = \frac{1}{2}kx_m^2 \quad \text{（最大势能）}$$

$$\underbrace{\text{变化}+\text{变化}}_{\text{相差}\frac{\pi}{2}} = \text{常量}$$

动—势 转化



任何时刻机械能为常量，机械能守恒

以上讨论的简谐振动是**完全理想的情况**：没有能量耗散

$$\downarrow$$

能量守恒

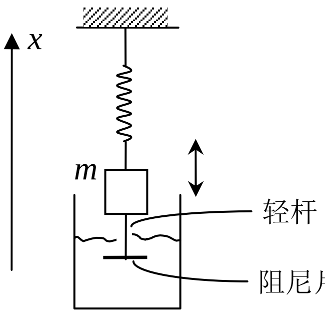
$$\downarrow$$

振幅不变

对于**实际的振动系统**，由于存在能量的耗散，同时没有外界能量补充时，系统的能量或振幅将随时间逐渐衰减，这就是我们将要讨论的阻尼简谐振动。

考虑一个在空气或其他流体中的振动，由于流体粘滞阻力可表示为 $-bv_x$（详见第四章）

如图，系统中质量为 m 的物体在偏离平衡位置所受到的力 f_x



$$f_x = -kx - bv_x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv_x$$

$$= a_x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}v_x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$ 阻尼振动方程

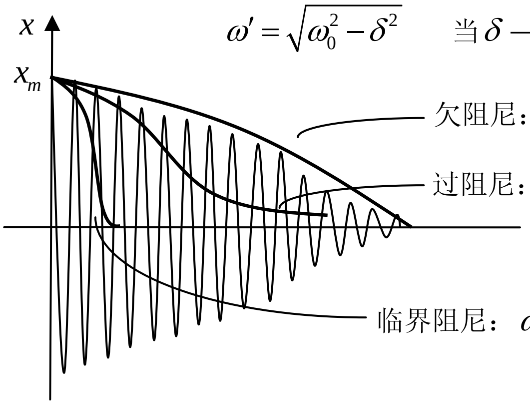
$$\omega_0 = \frac{k}{m} \qquad \delta = \frac{b}{2m}$$

该方程的解：$x(t) = \underbrace{x_m e^{-\delta t}}\cos(\omega' t + \varphi)$ $\begin{pmatrix} x_m \\ \varphi \end{pmatrix}$ 初始条件决定

当 $t = \dfrac{1}{\delta}$ 时，振幅衰减到初始值的 $\dfrac{1}{e}$

$= \tau$ 寿命

$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ 当 $\delta \to 0$ $\omega' \to \omega_0$ 阻尼为零 $\to$ 简谐振动



欠阻尼：$\omega_0 > \delta$ $\to$ 反复振动趋于平衡位置

过阻尼：$\omega_0 < \delta$ $\to$ 无振动缓慢趋向平衡位置

临界阻尼：$\omega_0 = \delta$ $\to$ 无振动快速趋向平衡位置