第 16 次课 (势能与平衡，能量守恒定律，内能，热量，守恒定律与对称性) 10 月 31 日

$$\text{保守力}\,\bar{F} \xrightarrow{\text{引入}} \overset{\text{空间势能函数}}{U(\bar{r})} \longrightarrow \overset{\text{保守力做功用势能表示}}{W=\int \bar{F}\cdot d\bar{S}=-\Delta U}$$

保守力做功＝系统势能的减少

$$\text{系统} \longrightarrow \underbrace{\Delta K=-\Delta U \text{ 或 } \Delta(K+U)=0}_{\text{机械能守恒定律}} \qquad E=K+U \quad \text{机械能}$$

对于一维保守系统：已知 $\left\{\begin{array}{l}\text{势能}\,U(x) \\ \\ \text{总能}\,E\ \text{（守恒量）}\end{array}\right.$ $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E-U(x)\right)} \\ x(t) \leftarrow t=\displaystyle\int_{x_0}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}}dx' \\ F(x)=-\dfrac{dU(x)}{dt}\end{array}\right.$

1) $E=E_0$， $x=x_0$， $F(x_0)=0$

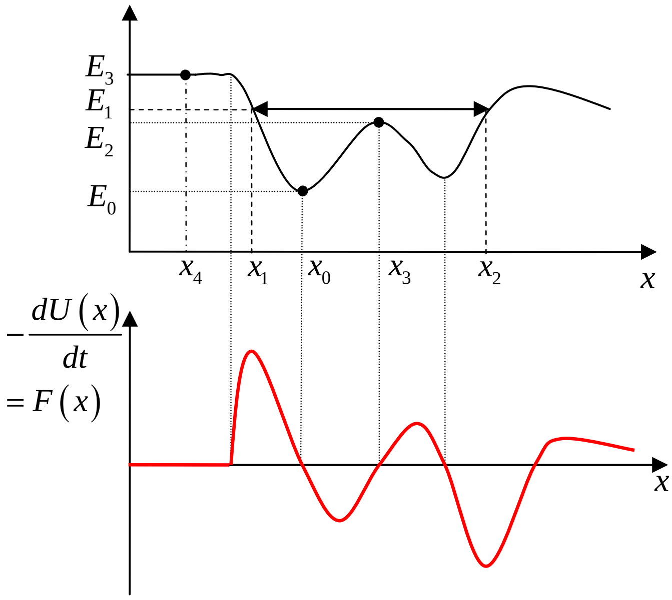
稳定平衡

2) $E=E_2$， $x=x_3$， $F(x_3)=0$

不稳定平衡

3) $E=E_3$，$x=x_4$，中性（随遇）平衡

4) $E=E_1$，$x_1\le x\le x_2$，运动（平衡）



对三维系统的势能函数：$U(\bar{r})=U(x,y,z)$

$$\bar{F}=-\nabla U(\bar{r})=-\frac{\partial U(\bar{r})}{\partial x}\hat{i}-\frac{\partial U(\bar{r})}{\partial y}\hat{j}-\frac{\partial U(\bar{r})}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \quad \text{梯度算符}$$

在势能函数空间，物体在空间某点受力 ＝ 势能函数在该点的梯度的负值

$\downarrow$

梯度大 $\longrightarrow$ 力大

能量与稳定性

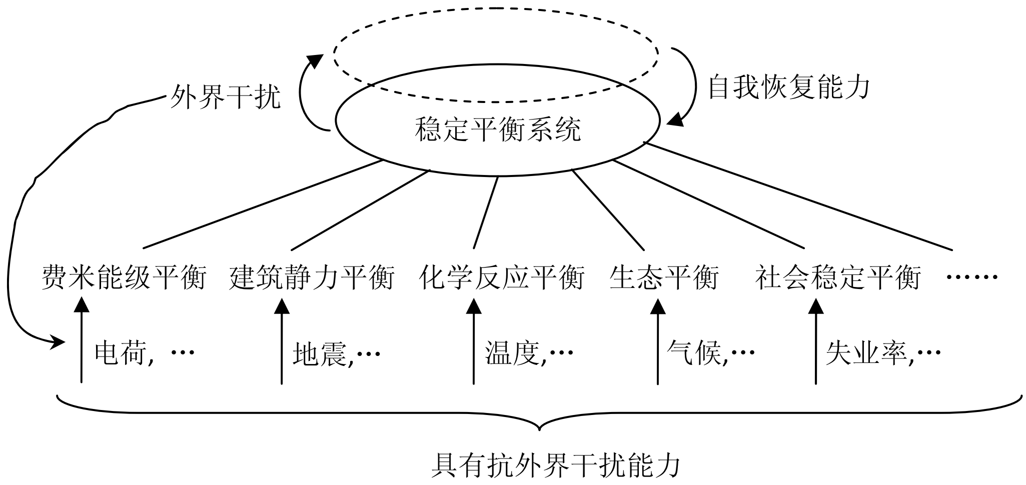
稳定平衡

$\sum \vec{F}_{ext} = 0$　　$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$　　$U(\vec{r})$ 极小值

↓

物体偏离平衡位置，
势能上升，有恢复力

举例：分析比萨斜塔

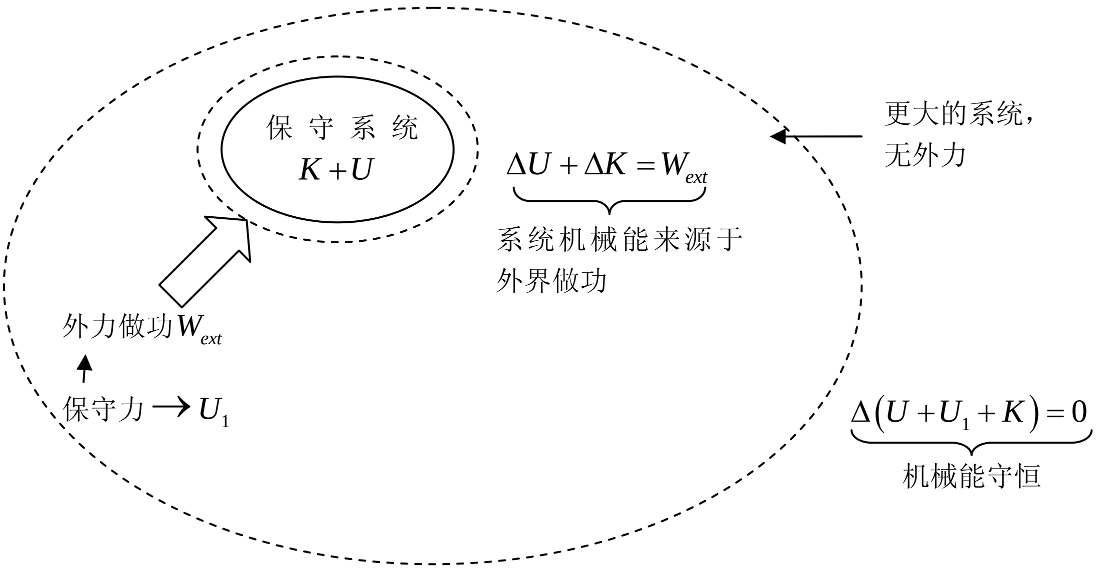


物体若不处在势能极小点，则无恢复力，物体将受力发生偏离原来位置的运动　势能的差异

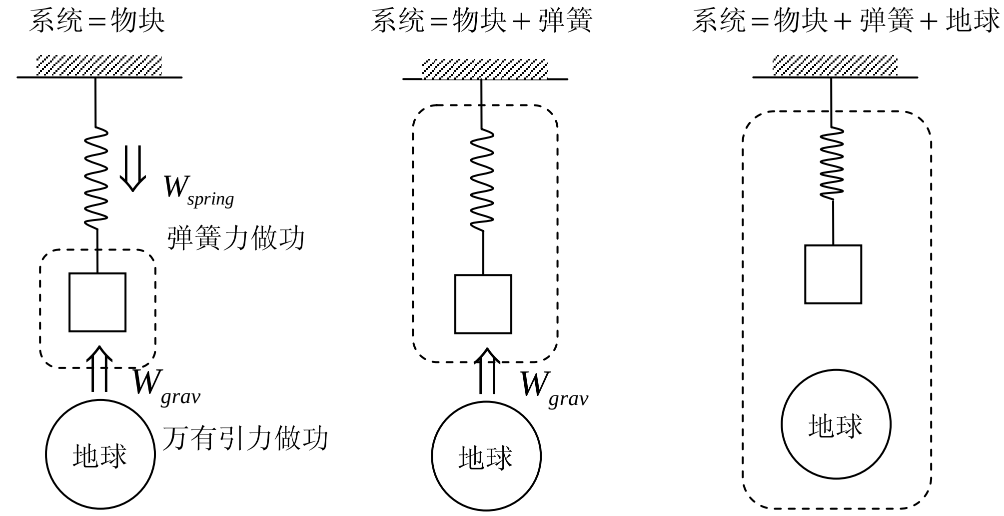
差别 $\xrightarrow{\text{导致}}$ **流动**（运动）

- 势差 → 水流
- 电势差 → 电流
- 浓度差 → 扩散流
- ……
- 地域差别 → 人员流动，资本流动
- 政治差别 → ？？
- 经济差别

Chapter 13　Energy 3: Conversation of Energy



机械能守恒定律随系统选择不同其表示形式不同
- 有功形式
- 无功形式



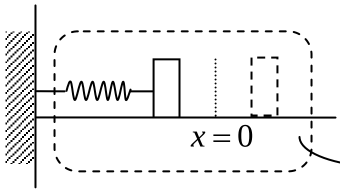
$$\underbrace{\Delta K=W_{spring}+W_{grav} \qquad \Delta\left(K+U_{spring}\right)=W_{grav} \qquad \Delta\left(K+U_{spring}+U_{grav}\right)=0}_{\text{能量守恒定律表现形式} \rightarrow \text{系统选择有关}}$$

能量守恒定律普遍成立，但对一些系统仅用机械能无法解释，**例如：**

1) 手推黑板：力的作用点没有位移 $\Delta W_{ext}=0$，重心没有竖直方向移动 $\Delta U=0$，

若用 $\Delta U+\Delta K=W_{ext}$ $\rightarrow$ $\Delta K=0$，但实际 $\Delta K\neq 0$ $\Rightarrow$ 矛盾

2) 压缩弹簧—物体：



压缩弹簧，$\Delta U_{spring}\neq 0$，静止释放 $\longrightarrow$ 振动 $\xrightarrow{\text{摩擦}}$ 静止

$\underbrace{\text{静止释放}\longrightarrow\text{振动}\xrightarrow{\text{摩擦}}\text{静止}}_{\Delta K=0}$

系统无外力 $W_{ext}=0$

由 $\Delta U+\Delta K=W_{ext}\rightarrow \Delta U_{spring}=0$

矛盾

解决以上矛盾，必须在能量守恒方程中加一新的能量项：**系统内能**(internal energy)

$$E_{\text{int}}$$

$$\Delta K+\Delta U+\Delta E_{\text{int}}=W_{ext}$$

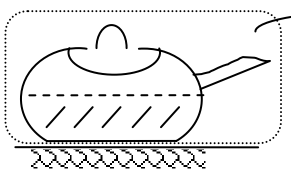
1) 手推黑板：$\Delta K+\Delta E_{\text{int}}=0$　$\Delta K=-\Delta E_{\text{int}}$　人获得动能来源人体内能的减少

2) 有摩擦的弹簧物块：$\Delta U_{spring}+\Delta E_{\text{int}}=0$，系统储有的弹性势能 转化为系统的内能

$$\Delta\left(K+U+E_{\text{int}}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{其他类型能量}}}{\cdots}\right)=W_{ext}$$

但它不能解释加热壶水系统

3) 加热壶水系统：



系统：$\Delta K=0$，$\Delta U=0$，$\Delta E_{\text{int}}\neq 0$，$\Delta W_{ext}=0$

由 $\Delta\left(K+U+E_{\text{int}}\right)=W_{ext}$ $\longrightarrow$ $\Delta E_{\text{int}}=0$，矛盾

解决这一矛盾：系统能量增加除了通过外界做功的途径，另一个途径是外界输入的热量 Q，故：

$$\Delta\left(\overbrace{K+U+\Delta E_{\text{int}}+\cdots}^{E_{total}}\right)=W_{ext}+Q \quad \text{（热力学第一定律）}$$

质心能量方程（COM）与能量守恒方程（COE）

由 $F_{ext} = ma_{cm} \rightarrow F_{ext}dx_{cm} = ma_{cm}dx_{cm} = m\frac{dv_{cm}}{dt}v_{cm}dt = mv_{cm}dv_{cm}$

两边积分

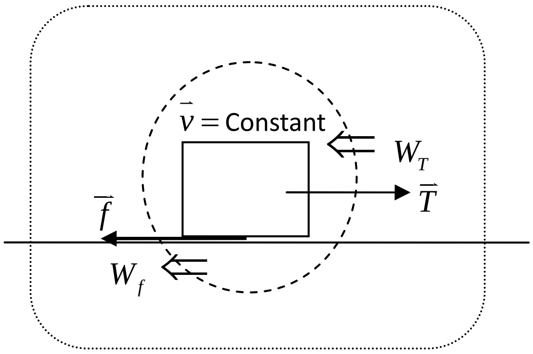
$$\int F_{ext}dx_{cm} = \frac{1}{2}mv_{cm,f}^2 - \frac{1}{2}mv_{cm,i}^2 = K_{cm,f} - K_{cm,i} = \Delta K_{cm}$$

$$W_{cm,ext} = \Delta K_{cm}$$

合外力（不一定通过质心）集中在质心对质心所做的功等于质心平动能的改变

$\begin{matrix} COM \\ COE \end{matrix}$ 解决问题例子详见讲义

摩擦力做功：



匀速运动，$T = f$

系统：$\Delta K + \Delta E_{\text{int}} = W_f + W_T$

$$\Delta K = 0,\quad \Delta E_{\text{int}} \neq 0,\quad W_T = fS$$

故 $W_f = -fS + \Delta E_{\text{int}}$

表明在有内能变化的条件下，摩擦力做功一般不能表示成 $W_f = -fS$

守恒定律与对称性 1918 年诺特定理

1) 动量守恒 $\leftrightarrow$ 空间平移对称性(或不变性)

势能 $U(\vec{r})$ 在空间、时间平移以及空间转动不变

2) 角动量守恒 $\leftrightarrow$ 空间转动对称性

3) 机械能守恒 $\leftrightarrow$ 时间平移对称性

举例：核电 $\leftrightarrow$ 水电的转换