第 15 次课 (保守力，非保守力，势能，机械能守恒定律，例题) (10 月 26 日)

力

在时间上积累效应 $\longrightarrow$ 冲量 $J=\int \overline{F}dt=\overline{p}_f-\overline{p}_i$ 冲量—动量定理

在空间上积累效应 $\longrightarrow$ 功 $W=\int \overline{F}\cdot d\overline{S}=K_f-K_i$ 功—动能定理

$\downarrow$

从做功的角度看

$\downarrow$

力 $\xrightarrow{\text{做功}}$

- 保守力
  - 弹簧力
  - 重力
  - 万有引力（有心力）
  - 电场力
  - …
- 非保守力 — 摩擦力

1) 弹簧力做功 $F=-kx$

$$W=\int_{x_i}^{x_f}-kxdx=-\left(\frac{1}{2}kx_f^2-\frac{1}{2}kx_i^2\right)$$

只与起始和终止位置有关

与具体经历路径无关

如果回到起点($x_f=x_i$), 闭合路径 $W=0$

$$\oint -kxdx=0$$

2) 重力做功 $\overline{F}=-mg\hat{k}$

$$\overline{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} \qquad d\overline{r}=dx\hat{i}+dy\hat{j}+dz\hat{k}$$

$$W=\int_i^f \overline{F}\cdot d\overline{r}=\int_{z_i}^{z_f}-mgdz=-mg\left(z_f-z_i\right)$$

只与起始和终止位置有关

与具体经历路径无关

如果回到起点($z_f=z_i$),

闭合路径 $W=0$

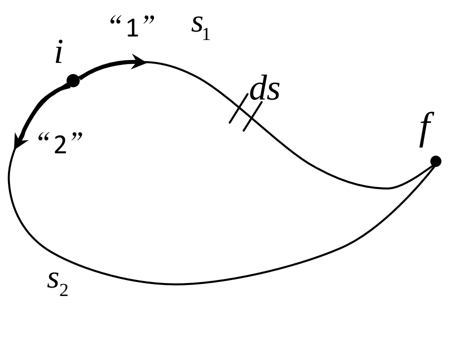
3) 摩擦力做功

$$W_1=\int_1 fds=fs_1$$

$$W_2=\int_2 fds=fs_2$$

与具体路径有关

$$\oint fds\neq 0$$



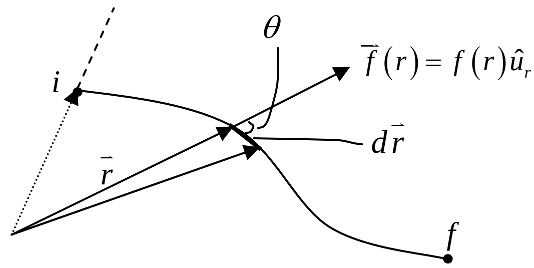
力做功区分**保守力与非保守力**

做功　路径　力	与路径	闭合路径
保守力	无关	$W=\oint \overline{F}\cdot d\overline{S}=0$
非保守力	有关	$W=\oint \overline{F}\cdot d\overline{S}\neq 0$

几种保守力的特定条件：

1) 一维运动：凡是位置坐标 x 单值函数的力都是保守力，如胡克定律 $f=-kx$
2) 一维以上运动：力的方向与大小都与位置无关，则是保守力，如 重力
3) 有心力（大小仅是 r 的单值函数）：在空间上存在一个中心 O，物体 P 在任何位置所受的力 $\overline{f}\parallel\overline{OP}$，如万有引力

证明有心力是保守力



$dW=\overline{f}\cdot d\bar{r}=f(r)\cos\theta ds$ （ds 为微元的弧长)

$=f(r)dr$

$W=\int_i^f f(r)dr=\int_{r_i}^{r_f} f(r)dr$　　可积积分只与 r_f 和 r_i 有关，与路径无关

$\overline{f}$ 是保守力

势能：

势能是把物体从一个初始位置 O(任意规定的，在这一点势能定为零)没有加速度地移动到给定点时，“我们”所做的功。

对于保守力 $\overline{F}$，给定点 $\bar{r}$ 位置的势能 $U(\bar{r})=-\int_0^{\bar{r}}\overline{F}\cdot d\overline{S}=-W_{O,\bar{r}}$

定义了势能 $\longrightarrow$ 我们可以方便计算保守力使物体从 i 初态变到末态 f 所做的功

$$W_{if}=\int_i^f \overline{F}\cdot d\overline{S}=\int_0^f \overline{F}\cdot d\overline{S}-\int_0^i \overline{F}\cdot d\overline{S}=\left(-\int_0^i \overline{F}\cdot d\overline{S}\right)-\left(-\int_0^f \overline{F}\cdot d\overline{S}\right)$$

$$=-\left(U_f-U_i\right)=-\Delta U$$

即保守力做的功等于势能的减少

$W=-\Delta U$

机械能守恒定律

在一个只有保守力的系统中，系统的机械能 E (动能 K 与势能 U 之和)守恒。

$$\Delta E = \Delta\left(K+U\right)=0 \quad \text{或} \quad E=K+U \quad \text{常量}$$

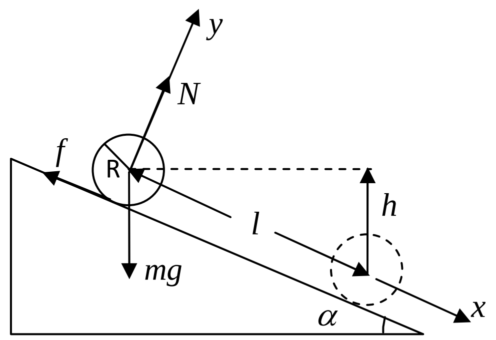
$\because$ 在一个保守力的系统中，保守力做的 $W=-\Delta U$，同时根据功—能定理 $W=\Delta K$

$\therefore$ $-\Delta U=\Delta K$ $\quad \underbrace{\text{势能的减少} = \text{动能的增加}}_{\text{动能与势能可以相互转换}}$

对于转动系统（刚体或质心系）的动能 $\quad K=\frac{1}{2}Mv_c^2+\frac{1}{2}I\omega^2$

势能 质心的位置的势能

例题：



圆柱体从静止开始无滑动滚下，质心下落了 h 高度时，求质心的速率 v_c

解决这一问题常用的方法

1) 动力学方法
2) 功能定理的方法
3) 机械能守恒的方法 $\longrightarrow$ 该系统中虽然有非保守力 f，但 f 不做功，其它力是保守力，故 E 是守恒量

初始位置： 势能零点，动能为零 $E_i=0$

末态位置： $\underbrace{-mgh}_{U}+\underbrace{\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I\omega^2}_{K}=E_f=0$

约束条件： 纯滚动 $v_c=R\omega$ 和 $I_c=\frac{1}{2}mR^2$ 代入

$$v_c=\sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

问题：为什么摩擦力 f 不做功？

2) 用功能定理解决该问题

质心平动：$\underbrace{\left(mg\sin\alpha - f\right)l}_{\text{外力做功}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_c^2}_{\text{质心动能的变化}}$

绕质心转动： $W_{转} = \int \tau_z d\varphi$

$$= \int_0^{-\varphi}\left(-fR\right)d\varphi$$

$$= \underbrace{fR\varphi}_{\text{转动功}} \quad = \underbrace{\frac{1}{2}I_c\omega^2}_{\text{转动动能}}$$

加约束条件： $R\varphi = l$， $v_c = R\omega$ 和代入 $I = \frac{1}{2}mR^2$

$$v_c = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

问题：在这里显然我们用了摩擦力做的功，但为什么上面我们还能用机械能守恒？

注意：这里的摩擦力做了两部分功

1) 平动：做了负功，使平动能减少了 fl
2) 转动： fR 摩擦力矩做了正功，使转动能增加了 fl

$\Downarrow$

摩擦力做的总功为零

$\downarrow$

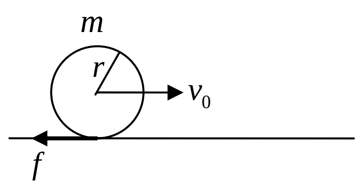
仅仅使一部分平动动能转化为转动动能

另外，纯滚，接触点瞬时静止，无相对滑动，故不做功。

例题：给小球一个初始速度 $\vec{v}_0$，摩擦系数 μ

问：1) 多长距离变为纯滚？

2) 纯滚时的质心速率？



解： 力： $f = -\mu mg = ma_c \quad a_c = -\mu g \quad v_c\left(t\right) = v_0 - \mu gt$

力矩： $\tau = \mu mgr = I\alpha \quad \alpha = \frac{\mu mgr}{I} = \frac{5\mu g}{2r} \quad \omega\left(t\right) = \alpha t = \frac{5\mu g}{2r}t$

随时间$t\uparrow$，$v_c\downarrow$，$\omega\uparrow$　t时间　$v_c = r\omega$　纯滚

$$v_0 - \mu g t = \frac{5\mu g}{2r} t$$

$$t = \frac{2v_0}{7\mu g}$$

距离　$S = v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu g}$　，　$v_c = \frac{5v_0}{7}$

$$W_f = \left| f \cdot S \right| = \frac{12}{49} m v_0^2$$

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{7}{49} m v_0^2$$

问题：为什么$W_f \neq \Delta K$？