第 10 次课 (转动动力学，力矩，转动惯量) 2007.10.10

上节课介绍了定轴转动中，角变量与线变量的关系

线加速度： $\vec{a}=\underbrace{(a_r-r\omega^2)}_{\text{径向分量}}\hat{u}_r+\underbrace{(2v_r\omega+r\alpha)}_{\text{切向分量}}\hat{u}_\varphi$

1） 对于刚体定轴匀速转动： $\vec{a}=-r\omega^2\hat{u}_r=-\underbrace{\frac{v_r^2}{r}}_{\text{向心加速度}}\hat{u}_r$

$$a_r=0$$
$$u_r=0$$
$$\alpha=0$$

2） 在匀速转动参照系中的径向匀速运动： $\vec{a}=-r\omega^2\hat{u}_r+2v_r\omega\hat{u}_\varphi$

$$\alpha=0$$
$$a_r=0$$

$\downarrow$

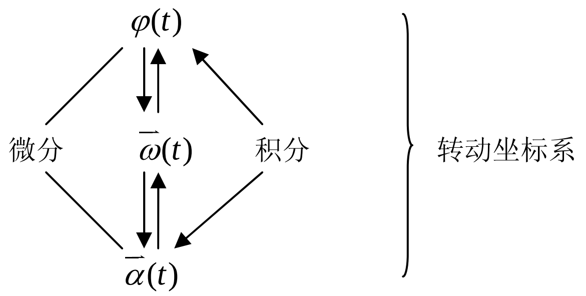
非惯性系中 ——— 引入惯性力

$$\overline{F}_v=-m\vec{a}=\underbrace{r\omega^2}_{\text{沿径向向外惯性离心力}}\hat{u}_r-\underbrace{2v_r\omega}_{\text{与切向相反（}v_r>0\text{，沿径向向外力）的科里奥利力}}\hat{u}_\varphi$$

3）刚体定轴转动： $\vec{a}\sim\vec{\omega}$，$\vec{\alpha}$ 一般关系

$$\vec{a}=\underbrace{\vec{\omega}\times\underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{R})}_{\vec{v}}}_{\text{径向分量}}+\underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{R}}_{\text{切向分量}}$$

Chapter 9　Rotational Dynamics



$\bar{\tau}$　力矩
I　转动惯量
$\bar{L}$　角动量

引入这些物理量$\underbrace{\text{描述转动状态的变化}}_{\text{转动动力学}}$（产生角加速度）

转动状态的改变 ———— 显然与外力有关

力的大小、方向、作用点 } 力的三要素

作用在刚体上的力不仅要考虑其大小、方向，而且要考虑力的作用点。同样大小的且具有相同方向的两个力但由于作用点不同，刚体运动状态会完全不同。

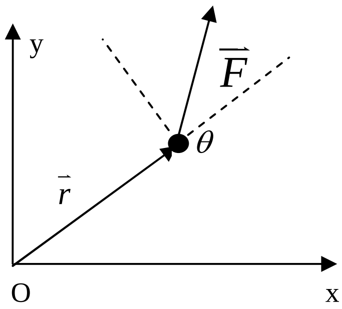
举例：开门

力称为滑移矢量，沿通过作用点的直线移动，对刚体作用不变
即不是平移矢量

力系分类
- 1）共点力系 ⟶ 直接求合力
- 2）水平力系：一般不能直接求合力，因为合力作用点：
  - ①完全平行　$\bar{F}_1 // \bar{F}_2$
  - ②反平行
    - $|\bar{F}_1| \neq |\bar{F}_2|$
    - $|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|$　$\bar{F} = 0$　无作用点 ⟶ 力偶

  （①与②中 $|\bar{F}_1| \neq |\bar{F}_2|$ 的情况：）$\sum \bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 |$　必须确定新的作用点
- 3）共面力系
- 4）一般力系

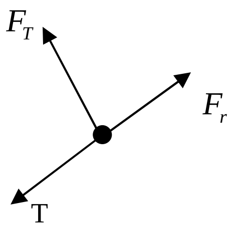
单一质点定轴转动（轻杆连结绕通过原点 O 的 z 轴转动）



力 $\overline{F} = \underbrace{F\sin\theta\hat{u}_\varphi}_{F_T} + \underbrace{F\cos\theta\hat{u}_r}_{F_r}$

切向　　　径向

质点上力分析



F_r 被杆对质点张力平衡

$\sum\overline{F} = \overline{F}_T = m\vec{a} = ma\hat{u}_\varphi$

线角变量关系

$\overline{F}_T = F\sin\theta = ma_T = mr\alpha_z$

θ 是 $\vec{r}$ 与 $\overline{F}$ 两个矢量夹角，两边乘以 r

$\underbrace{rF\sin\theta}_{} = \underbrace{mr^2}_{}\alpha_z$

单一质点相对转轴的转动惯量 $I = mr^2$

力矩 $\tau_z = I\alpha_z$

$\vec{\tau} = \vec{r}\times\overline{F}$

刚体的转动惯量： $I = \lim\limits_{\delta m\to 0}\sum r_n^2\delta m = \int r^2 dm$

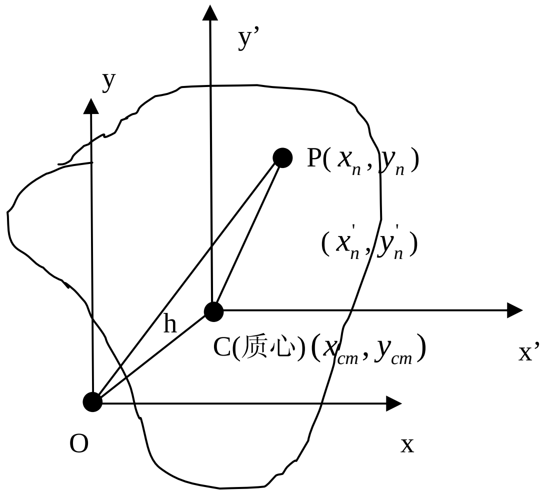
积分计算给出许多物体的转动惯量

$I_{球} = \frac{2}{5}MR^2 = Mk_{球}^2$　　$k_{球} = \sqrt{\frac{2}{5}}R$ 回旋半径

$I_{球壳} = \frac{1}{2}MR^2 = Mk_{球壳}^2$

平行轴定理：质量为 M 的物体绕某轴的转动惯量 I 等于物体绕于该轴平行的且通过质心的转轴的转动惯量 I_{cm} 加上质量乘以两轴距离的平方

$$I = I_{\mathrm{cm}} + Mh^2$$



证明：

根据 $x_n = x_n^{'} + x_{cm}$

$y_n = y_n^{'} + y_{cm}$

$$I = \sum m_n r_n^2 = \sum m_n (x_n^2 + y_n^2)$$

$$= \sum m_n (x_n^{'2} + y_n^{'2}) + (x_{cm}^2 + y_{cm}^2)\sum m_n + 2x_{cm}\underbrace{\sum m_n x_n^{'}}_{=0} + 2y_{cm}\underbrace{\sum m_n y_n^{'}}_{=0}$$

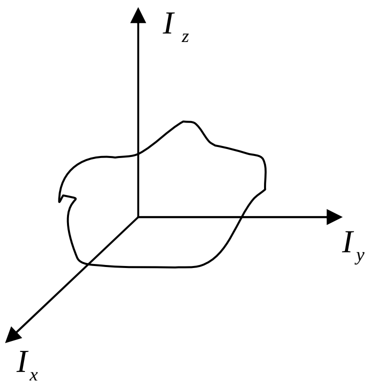
在质心系中求质心坐标 $x_{cm}^{'} = 0$

$y_{cm}^{'} = 0$

$$= I_{\mathrm{cm}} + Mh^2$$

垂直轴定理：绕垂直薄片某轴的转动惯量 I_z 等于两个平行薄片且相互垂直并都通过该轴与薄片交点的两个轴其转动惯量之和

$$I_z = I_x + I_y$$



$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ （但不能随意写成 $\vec{F} \times \vec{r}$ ，否则物理上有很大不同意义）

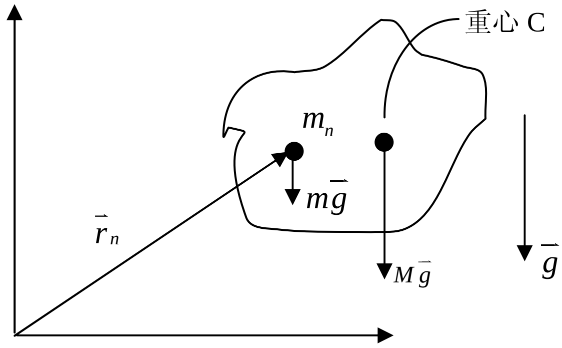
举例：负折射现象

重力引起的力矩

$$\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_n = \sum (\vec{r}_n \times m_n \vec{g})$$

$$= (\underbrace{\sum m_n \vec{r}_n}_{M\vec{r}_{cm}}) \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g}$$

$$\vec{r}_{cg}$$



一个物体重力矩＝相当于物体的总重力 $M\vec{g}$ 作用在质心上所产生的力矩

重力相当于质心或重心的力矩为零

如果质心与重心不重合？ $\vec{g}$ 不是常矢量？