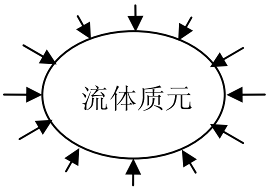
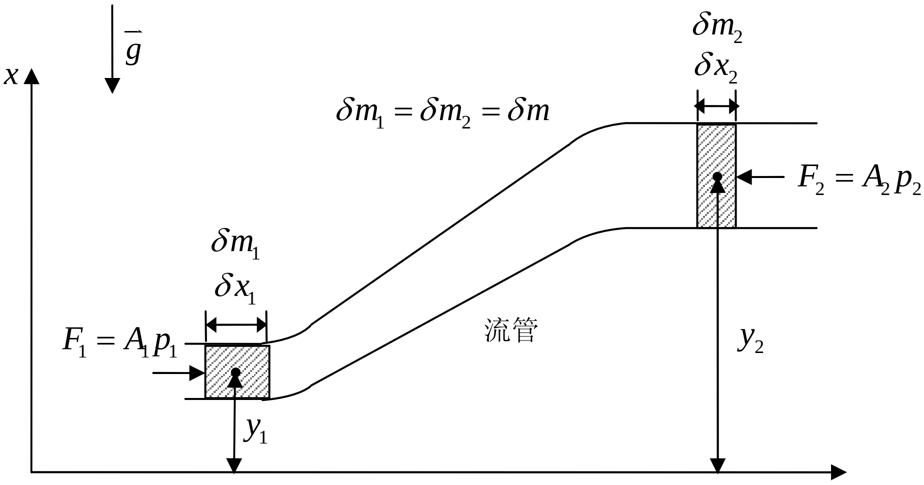
第 22 次课　伯努利方程及应用_粘滞流体_动态升力 **2007.11.21**

伯努利方程：



1) 周围流体的作用
2) 外界环境作用，如重力、电磁力、惯性力……



$$W_{ext} = W_1 + W_2 + W_3 = A_1 p_1 \delta x_1 + \left(-A_2 p_2 \delta x_2\right) + \left[-\delta m g\left(y_2 - y_1\right)\right]$$

$$= \frac{p_1}{\rho}\delta m - \frac{p_2}{\rho}\delta m - \delta m g\left(y_2 - y_1\right)$$

功能定理：$W_{ext} = \Delta K = \frac{1}{2}\delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\delta m v_1^2$　　$\delta m = \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

体密度

功　动能　重力势能

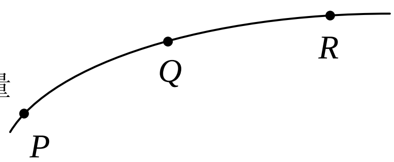
$\uparrow$　$\uparrow$　$\uparrow$

$$\underbrace{p}_{\text{压强}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{动压}} + \underbrace{\rho g y}_{\text{静压}} = const$$　**定常流动**

$\downarrow$

在流线上各点相等

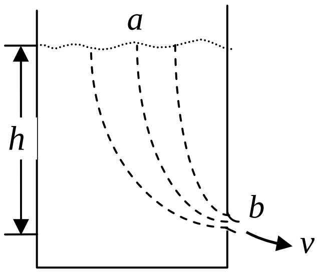
流线上的不变量



静止流体：$v_1 = v_2 = 0$，伯努利方程 $\rightarrow$ $p_1 = p_2 + \rho g \underbrace{\left(y_2 - y_1\right)}_{h}$

伯努利方程的应用：

1) 小孔的流速：

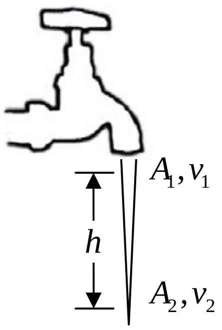


$$p_a+\frac{1}{2}\rho v_a^2+\rho g y_a=p_b+\frac{1}{2}\rho v_b^2+\rho g y_b$$

$$p_a=p_b=p_0 \quad v_a=0$$

$$v_b=\sqrt{2g\left(y_a-y_b\right)}=\sqrt{2gh}$$

2) 水龙头水流



已知，A_2，A_1，h，求 v_1

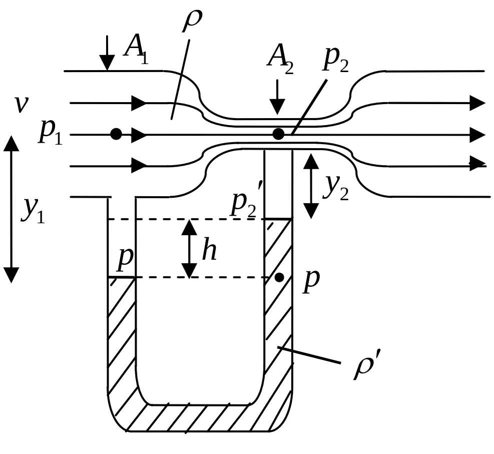
$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g y_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g y_2$$

$$p_1=p_2=p_0$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\rho v_2^2=\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g\overbrace{\left(y_1-y_2\right)}^{h}\\ A_1v_1=A_2v_2\end{cases}$$

$$v_1=\sqrt{\frac{2ghA_2^2}{A_1^2-A_2^2}}$$

3) 文丘里流量计



求 v

解：

水平方向伯努利方程：

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

竖直方向 静压：

$$p=p_1+\rho g y_1=p_2+\rho g y_2+\rho' gh$$

连续性方程：$A_1v_1=A_2v_2$

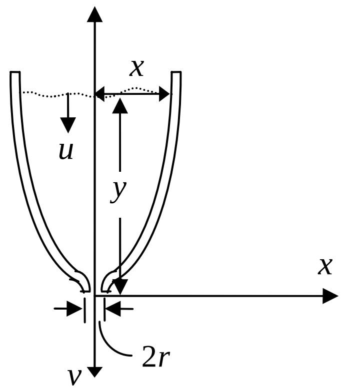
$$\frac{1}{2}\rho v_2^2-\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_1-p_2=\left(\rho'-\rho\right)gh$$

$$A_1v_1=A_2v_2$$

$$v=v_1=A_2\sqrt{\frac{2\left(\rho'-\rho\right)gh}{\rho\left(A_1^2-A_2^2\right)}}$$

4)　旋转对称水壶

底面有一个半径为 r 的小孔，液体在通过小孔泄露时，壶内液面匀速率 u 下降，求壶的形状 $y\sim x$，已知 u，r



解：$\begin{cases} \text{伯努利方程：} p_0+\dfrac{1}{2}\rho u^2+\rho g y=p_0+\dfrac{1}{2}\rho v^2 \\ \text{连续性方程：} u\pi x^2=v\pi r^2 \end{cases}$

$$u^2\left(\frac{x^4}{r^4}-1\right)=2gy$$

$$y=\frac{u^2\left(x^4-r^4\right)}{2gr^4}\overset{x\gg r}{\approx}\frac{u^2x^4}{2gr^4}$$

古代用漏壶液面下降计时

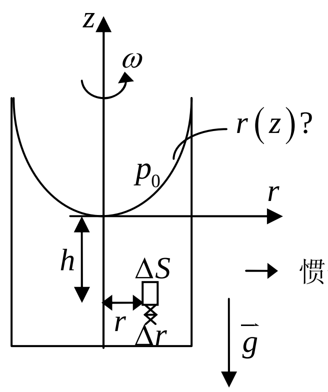
流线上：$p+\dfrac{1}{2}\rho v^2+\rho g y=const$　$\overbrace{\text{定常流动、理想流体、非转动流体}}^{\text{伯努利方程适用条件}}$

对于转动流体，不能直接用伯努利方程，但可以直接从流体质元出发解决问题

举例：旋转水桶的液面

解： 1)　径向平衡:

$$p(r)\Delta S+\underbrace{\Delta m\omega^2 r}_{\text{离心力}}-p(r+\Delta r)\Delta S=0$$



2)　竖直方向平衡

$$p(r)=p_0+\rho g\left(h+z(r)\right)$$

$$p(r+\Delta r)=p_0+\rho g\left(h+z(r+\Delta r)\right)$$

联立以上三个方程：　$z(r+\Delta r)-z(r)=\Delta z=\dfrac{\omega^2}{g}r\Delta r$

$$\frac{\Delta z}{\Delta r}=\frac{\omega^2}{g}r\xrightarrow{\Delta r\to 0}\frac{dz}{dr}=\frac{\omega^2}{g}r\Rightarrow z=\frac{\omega^2}{2g}r^2$$

当 $r=0, z=0$

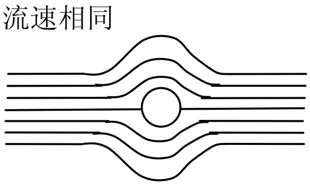
旋转抛物面

$$p(r,h)=p_0+\rho g h+\rho\frac{\omega^2}{2}r^2$$

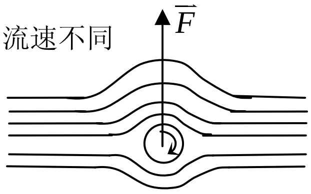
r,h 函数，不同的 r，产生压差

动态升力：

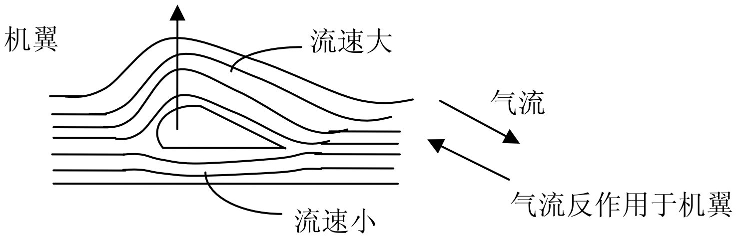
上下流速相同



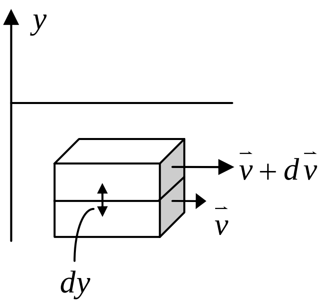
上下流速不同



旋转球表面的流线发生变化.
高尔夫球面为什么有许多凹坑？



粘滞流体：



流体中各相邻质元部分会发生相对移动（滑动），必然会产生阻碍其相对滑动的力，这种力我们称为“粘滞力”。

既存在于流体与器壁的界面，也存在于流体内部， 也称为摩擦力。

粘滞力正比于速度在其垂直方向空间变化率，即梯度 $\dfrac{dv}{dy}$，还正比于质元的面积 ΔA

故：$f=\eta\Delta A\underbrace{\dfrac{dv}{dy}}_{\text{速度在 } y \text{ 方向上的梯度}}$

η：比例系数，粘滞系数，单位：$N\cdot s/m$ 或 $Pa\cdot s$

	$\eta\ \left(20^{\circ}C\right)$
空气	1.8×10^{-5}
水	1.0×10^{-3}
甘油	1.5
⋮	

估算磁悬浮列车轨道的粘滞阻力：

$\sim 1N$