《离散数学教程》期中考试

200 年 4 月

学号______________　　　　　姓名__________________________

一　填空题（20 分）

1　设集合 A={{a, b}, c}，则 A 的幂集
P(A)={∅, {{a, b}}, {c}, {{a, b}, c} }。

2　设 R_1 是从 A 到 B 的二元关系，　R_2 是从 B 到 C 的二元关系，则从 A 到 C 的二元关系记为 $R_1°R_2$，
定义 $R_1°R_2$ ={(a, c) | a∈A, c∈C, ∃b 使(a, b)∈R_1, (b,c)∈R_2}。

3　设 R 是集合 A 上的二元关系，定义 R 的传递闭包，记为 R’，满足：
（1）R’是传递的;
（2）R’⊃R;
（3）对任一传递关系 R”，若 R⊆R”，则 R’⊆R”。

4　设（A, ≤）是偏序集合，B⊆A，若存在一个元素 b∈B，对所有 b’∈B,
都有 b’≤b；则称 b 是 B 的最大元。

5　设集合 A 的划分π={A_1, ……, A_n}，则由π建立 A 上的等价关系 R，
R=(A_1×A_1)∪ (A_2×A_2)∪……∪(A_n×A_n)。

二　判断下列命题是否正确，并说明理由。(括号内写“是”或“否”　)（40 分）

1　设 R 和 S 是集合 A 上的二元关系，若 R 和 S 是反对称的，则 R∪S 是反对称的。
（　否　）
R={(a, b), (a,c)}, S={(c,a), (c,d)}均为反对称，R∪S={(a, b), (a,c), (c,a), (c,d)}不是反对称。

2　设集合 A={{a}, b}，则{{a}}⊆P(A)。
（　否　）
P(A)={∅, {{a}}, {b}, {{a}, b}}, {a}不是 P(A)中的元素。

3　设 R 是集合 A 上的二元关系，若 R 是对称的和反自反的，则 R 一定不是传递的。
（　是　）
假设 R 是传递的，若(a, b)∈R，由于 R 是对称的，所以(b, a)∈R，所以(a, a)∈R，因为 R 是反自反的，所以与条件矛盾。

4　设函数 g: A⟶B, f: B⟶C, f ο g: A⟶C，若 f 和 g 是满射，则 f ο g 是满射。

（ 是 ）
因为 f 是满射，所以对 $c\in C$, $\exists b\in B$ 使 $f(b)=c$; 因为 g 是满射，对 $b\in B$，$\exists a\in A$ 使 $g(a)=b$。所以 $f\circ g(a)=f(g(a))=f(b)=c$。则 $f\circ g$ 是满射。

5 设 R 是集合 A 上的二元关系，若 R 是对称的和传递的，则 R 是自反的。
（ 否 ）
$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$R=\{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)\}$

6 设 R 是 A 上的二元关系，A’ 是 A 的子集，定义 A’ 上的关系 $R'=R\cap(A'\times A')$。如果 R 在 A 上是传递的，则 R’ 在 A’ 上是传递的；
（ 是 ）
反证法。假设 R’ 在 A’ 上不是传递的，则存在 $(a, b), (b,c)\in R'$，$(a, c)\notin R'$。因为 $(a, b), (b,c)\in R'$，所以 $a, b, c\in A'$。所以 $(a, c)\in A'\times A'$。因为 $(a, c)\notin R'$，所以 $(a, c)\notin R$；因为 $(a, b), (b,c)\in R$，所以 R 在 A 上不是传递的，导致矛盾。

三 综合题（40 分）
1 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$，在 A 上定义整除关系/，画出（A, /）的哈斯图，并设 $B\subset A$，试对
（1）$B=\{1, 2, 3\}$，求 B 的极大元和极小元。
（2）$B=\{1, 2, 3, 6\}$，求 B 的上界和下界。
(1) B 的极大元 2,3, 极小元 1。
(2) B 的上界 6, 12, 24，下界 1。

2 设正整数集合 I^+，又设 R 是定义在 $I^+\times I^+$上的二元关系：$(a, b)R(c, d)$当且仅当 $a\times d=b\times c$，(即 $a/c=b/d$)，证明：R 是在 $I^+\times I^+$上的一个等价关系。
证明：
（1）对任一$(a, b)\in I^+\times I^+$，有$(a, b)R(a, b)$，所以 R 是在 $I^+\times I^+$上的一个自反关系。
（2）若$(a, b)R(c, d)\Rightarrow a/c=b/d\Rightarrow c/a=d/b\Rightarrow(c, d)R(a, b)$, 所以 R 是在 $I^+\times I^+$上的一个对称关系。
（3）若$(a, b)R(c, d)$，$(c, d)R(e, f) \Rightarrow a/c=b/d, c/e=d/f \Rightarrow a/e=b/f \Rightarrow (a, b)R(e, f)$，所以 R 是在 $I^+\times I^+$上的一个传递关系。

3 证明：对于集合 A 和 B，若有 $A\cap B=A\cup B$，则 $A=B$。
证明：
$A=A\cap(A\cup B)$
$=A\cap(A\cap B)$
$=(A\cap A)\cap B$
$=A\cap B$
$=A\cap(B\cap B)$
$=(A\cap B)\cap B$
$=(A\cup B)\cap B$
$=B$

4 对于集合 A 和 B，证明 $A\subseteq B$ 当且仅当 $P(A)\subseteq P(B)$。

证明：

$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$

$\Rightarrow$：　$y\in P(A) \Rightarrow y\subseteq A \Rightarrow y\subseteq B \Rightarrow y\subseteq P(B)$

$\Leftarrow$：　$y\in A \Rightarrow \{y\}\in P(A) \Rightarrow \{y\}\in P(B) \Rightarrow y\in B$

5　证明 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

证明：

$A\cap(B\oplus C)$

$=A\cap((B-C)\cup(C-B))$

$=(A\cap(B-C))\cup(A\cap(C-B))$

$=((A\cap B)-(A\cap C))\cup((A\cap C)-(A\cap B))$

$= (A\cap B)\oplus(A\cap C)$

6　举出 A={a, b, c, d}上关系 R 的例子，使其具有下述性质：

a)　既是对称的，又是反对称的；

b) 既不是对称的，又不是反对称的；

c) 是传递的。

解：

a)　R1={(a,a), (b,b), (c, c) }

b)　R2={(a, b), (b, a), (c, d) }

c)　R3={(a, b), (b, c), (a, c) }

7　设 R_1 和 R_2 是 A 上的等价关系，C_1 和 C_2 分别是 A 中关于 R_1 和 R_2 的划分。

　　证明：$R_1\subseteq R_2$，当且仅当 C_1 中的每个等价类是包含于 C_2 的一些等价类之中。

证明：

关键：等价关系与等价类。

分析：在集合 A 上的任何一个等价关系，都可以确定一个划分（A/R），其元素是有关等价类。所以 $C_1= A/R_1$，$C_2= A/R_2$。反之，集合 A 上的任何一个划分都可以确定一个等价关系。

$C_1= A/R_1=\{C_{11}, C_{12}, \ldots\ldots, C_{1m}\}$

$C_2= A/R_2=\{C_{21}, C_{22}, \ldots\ldots, C_{2n}\}$

$R_1=\{C_{11}\times C_{11}\cup C_{12}\times C_{12}\cup\ldots\ldots \cup C_{1m}\times C_{1m}\}$

$R_2=\{C_{21}\times C_{21}\cup C_{22}\times C_{22}\cup\ldots\ldots \cup C_{2n}\times C_{2n}\}$

$R_1\subseteq R_2\Rightarrow$ 对任意 $C_{1i}, 1\le i\le m$，存在 $C_{2j}, 1\le j\le n$，使得 $C_{1i}\subseteq C_{2j}$。

对任意 $C_{1i}, 1\le i\le m$，存在 $C_{2j}, 1\le j\le n$，使得 $C_{1i}\subseteq C_{2j} \Rightarrow R_1\subseteq R_2$