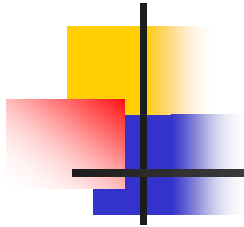




图论习题

考研习题与经典习题

2004-5



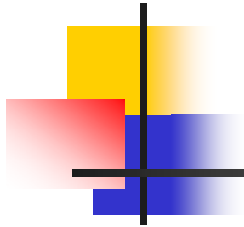
- 一、握手定理的应用
- 二、平面图、欧拉公式的应用
- 三、图的基本概念与应用
- 四、欧拉图和哈密顿图
- 五、图的着色



一、握手定理的应用

- 1. 已知具有 n 个度数都为3的结点的简单图 G 有 e 条边，
 - (1) 若 $e=3n-6$ ，证明 G 在同构意义下唯一，并求 e ， n 。
 - (2) 若 $n=6$ ，证明 G 在同构意义下不唯一。

- 提示：握手定理（北师大2000考研）



- 解：
- (1) 由握手定理， $3n=2e$ ；因为 $e=3n-6$ ，所以 $n=4$ ， $e=6$ 。这样的图是完全图 K_4 ，所以在同构的意义下唯一。
- (2) 由握手定理， $3*6=2e$ ； $e=9$ 。在同构的意义下不唯一。

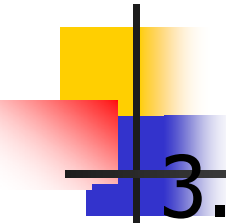


■ 解:

$$\sum_{i=1}^n \text{dev}(v_i) = 2e = 2 \times 21 = 42$$

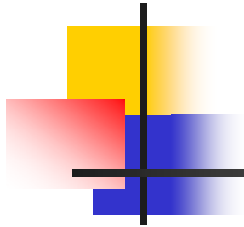
$$12 \times 3 + (n - 12) \times 2 = 42$$

$$n = 15$$

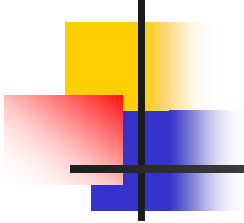


3. 已知 n 个结点的简单图 G 有 e 条边，各结点度数为3， $2n=e+3$ 。试画出满足条件的所有不同构的 G 。

- 提示：握手定理（西南交大2000考研/北京大学1990考研）
- 参考1(2)



- 解：由握手定理， $e=(3n/2)$ ；由已知， $e=2n-2$ ；所以 $n=6$ ， $e=9$ 。
- 在同构意义下**G**不是唯一的。

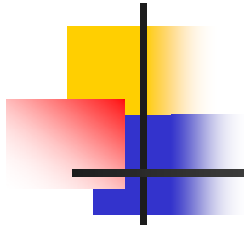
- 
-
- 4. 设树T有17条边，12片树叶，4个4度内结点，1个3度内结点，求T的树根的度数。

- （提示：握手定理。北大1997考研）



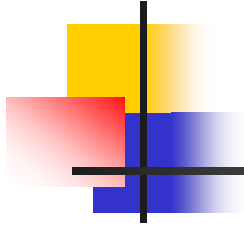
- 解：结点数为 $17+1=18$

由握手定理， $12*1+4*4+1*3+1*l=34$ ，
 $l=3$.



- 5. 设无向树 T 有3个3度, 2个2度结点, 其余结点都是树叶, 问 T 有几片树叶?

- 握手定理

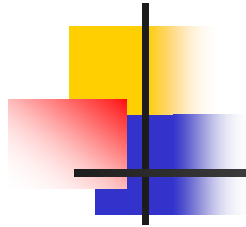


- 6. 证明：在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友。
- /*等价于：至少有两个顶点的简单图有两个相同度数的顶点
- /*中国科学院自动化所1998考研



二、平面图、欧拉公式的应用

- 1, 关于平面图的不等式的证明
欧拉公式及其推论的运用
- 2, 非平面图的判定
应用库拉托斯基定理



- 1. 设 G 是 n 个结点的连通简单平面图，若 $n \geq 3$ ，则 G 中必有一个结点度数不超过5。
- 提示：涉及度数，握手定理；连通平面图，欧拉公式；简单平面图，若 $n \geq 3$ ，欧拉公式的推论
- （西南交大1999考研）



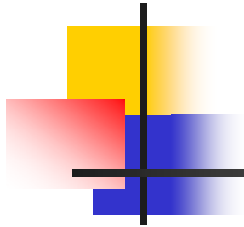
■ 证明:

握手定理: $\sum \text{dev}(v_i) = 2e$;

反证: 设每个结点的度数超过5, 即
 $\text{dev}(v_i) \geq 6$, 则 $2e = \sum \text{dev}(v_i) \geq 6n$, 所以
 $e \geq 3n$.

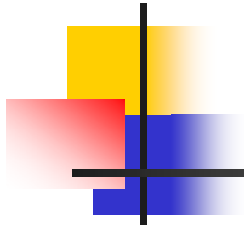
由欧拉公式的推论, $e \leq 3n - 6$ 。

所以矛盾。



- 2. 证明彼得森图是非平面图。
- 提示：要证明一个图不是平面图，首先考虑应用库拉托斯基定理。即在要判别的图中，找出一个 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分。

- （西安交通大学1997考研）



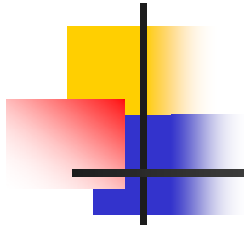
-
- 3. 证明小于**30**条边的简单平面图**G**中，至少有一个度数小于等于**4**的结点。

- 
- 证明：不妨设G是连通图。

因为 $e \leq 3n - 6$ ，假设所有顶点度数大于等于5；由握手定理， $\sum \text{deg}(v_i) = 2e$ ；

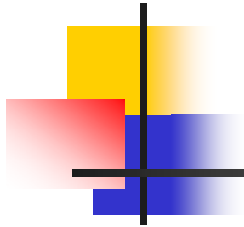
所以 $2e \geq 5n$ ，则有 $n \leq 2e/5$ 。

代入 $e \leq 3n - 6$ ，则 $e \leq 6e/5 - 6$ ，从而 $e \geq 30$ 。所以矛盾。

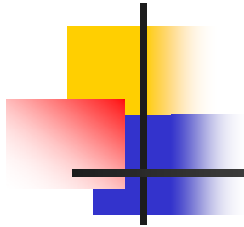


- 4. 证明在简单平面图 G 中, f 和 n 分别表示该图的面数和结点数,
- (1) 如果 $n \geq 3$, 则 $f \leq 2n - 4$ 。
- (2) G 中结点最小的度 $\delta(G) = 4$, 则 G 中至少有 6 个结点的度数小于等于 5。

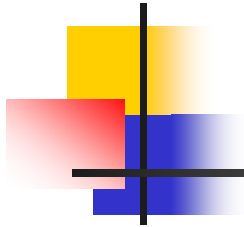
- (西安交通大学1996考研)



- (1) 证明：假设图中的边数为 e 。
由于简单图的每个面至少由3条边围成，因此 $3f \leq 2e$ 。由欧拉公式 $n - e + f = 2$ ，得 $e = n + f - 2$ ；代入 $3f \leq 2e$ 得到 $3f \leq 2(n + f - 2)$ ，得 $f \leq 2n - 4$ 。

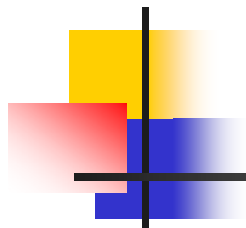


- (2) 证明：（反证法）
- 假设 G 中至多有5个结点的度数小于等于5。因为 $\delta(G)=4$ ，则 $\Sigma d(v) \geq 5 \times 4 + 6(n-5)$ 。因为 $\Sigma d(v) = 2e$ ，则 $e \geq 3n - 5$ 。由(1)， $e \leq 3n - 6$ 。

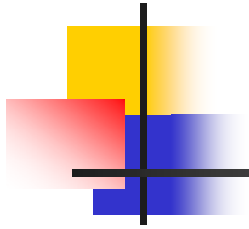


- 5. 设 G 是由 n 个结点， e 条边， ω ($\omega \geq 2$)个连通分支的平面图， G 的每个面至少由 k ($k \geq 3$) 条边围成，则

- $$e \leq \frac{k(n - \omega - 1)}{k - 2}$$



- 证明：设 G 的面数为 f ，各面的度数之和为 T ， $T=2e$ 。因为 G 的每个面至少由 k 条边围成，所以 $k*f \leq T=2e$ 。由欧拉公式的推广， $f = \omega + 1 + e - n$ ， $k*(\omega + 1 + e - n) \leq 2e$ 。
- 所以命题成立。





三、图的基本概念与应用

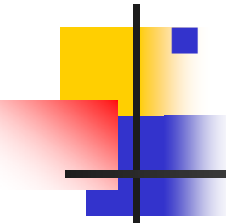
- 1. 补图
- 2. 连通性

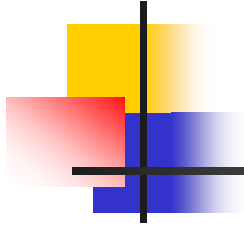


补图

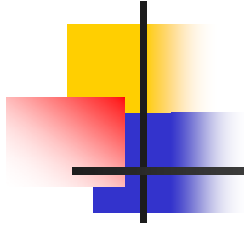
- 1. 证明无向图 G 是不连通的，则它的补图是连通的。

- 提示：分而治之（西南交大**1999**考研）
- 证明连通的两种方法：直接证明，反证法

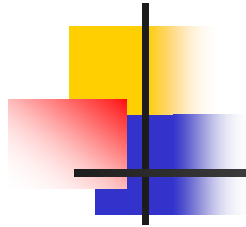
- 
- 证明：设 $G=(V, E)$ ，根据连通分支将 V 划分为 $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ，并设 $V_i=\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ ， $V_j=\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ ， $i \neq j$ ， $1 \leq i, j \leq n$ ， E_k 表示完全图的边集。
 - 任取 V 中两个结点，分两种情况讨论：
 - (1) 设 $u_i \in V_i$ ， $v_j \in V_j$ 。若 $(u_i, v_j) \notin E$ ，则 $(u_i, v_j) \in E_k - E$ 。所以 u_i, v_j 是连通的。即在不同连通分支中的两个结点在补图中是连通的。
 - (2) 设 $u_i, u_j \in V_i$ ， $v_j \in V_j$ 。由(1)， $(u_i, v_j) \in E_k - E$ ， $(u_j, v_j) \in E_k - E$ 。所以 u_i, u_j 通过 v_j 连通。即在相同连通分支中的两个结点在补图中是连通的。
 - 所以，命题成立。



- 2. 一个图如果同构于它的补图, 则该图称为自补图.
- 1) 试给出一个5个结点的自补图;
- 2) 证明: 一个图是自补图, 其对应的完全图的边数必是偶数;
- 3) 是否有3个结点或者6个结点的自补图.



- 2)证明：如果一个图是自补图，设该图的边数为 e ，则该图的自补图的边数也为 e ，所以对应的完全图的边数是 $2e$ ，为偶数。

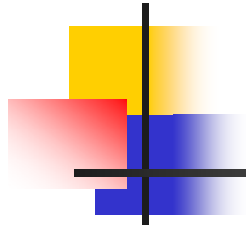


- 3)解：3个结点或者6个结点的完全图的边数分别为3和15，是奇数；所以不存在3个结点或者6个结点的自补图。



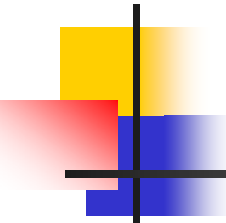
连通性

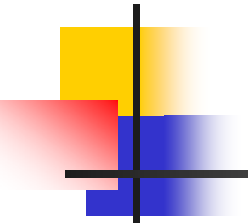
- 证明连通的两种方法：直接证明/反证法。
- 证明连通的直接证明方法：任取图中两点，寻找这两点间必定存在路。
- 证明连通的反证法：首先假设图不连通，则它具有多个连通分支，然后根据题目条件推出矛盾。推矛盾的过程，通常是将具有多个连通分支的图的边数放到最大的过程（放缩法），即使每个连通分支都是完全图，然后推出边仍然不满足条件。



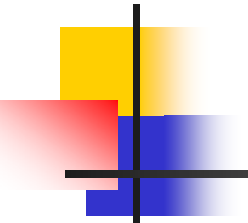
- 1. n 个结点的简单图 G , $n > 2$ 且 n 奇数, G 和 G 补图中度数为奇数的结点个数是否相等? 请证明或给出反例。

- (西南交大2001考研)

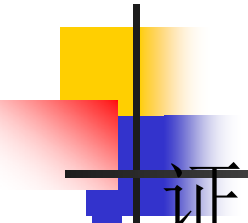
- 
- 解：一定相等。
 - 因为 $n > 2$ 且 n 奇数，则对于奇数个结点的完全图，每个结点的度数必为偶数。若 G 中度数为奇数的结点个数是 m ，则 G 的补图中 m 个结点的度数为（偶数-奇数）=奇数。 G 中度数为偶数的结点，在 G 的补图中这些结点的度数仍为（偶数-偶数）=偶数。
 - 所以命题成立。

- 
-
- 2. 设无向图 G 有 n 个结点, $n \geq 2$ 。证明:
 - 1) 当 $\delta(G) \geq n/2$ 时, G 是连通图;
 - 2) 当 $\delta(G) \geq (1/2)(n+k-1)$ 时, G 是 k -连通图, 其中 $1 \leq k \leq n-1$ 。

- (北京大学1994年考研)

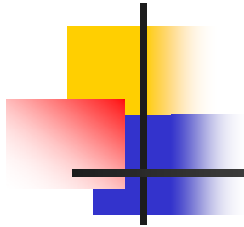
- 
-
- 3. 若 G 为简单图, 且 $m > C_{n-1}^2$, 则 G 是连通的。
其中 m 和 n 分别为该图的边数和顶点数。

- /*中国科学院自动化所1998考研

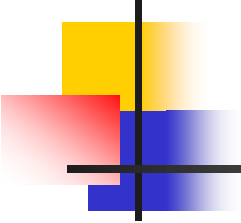


■ 证明方法:

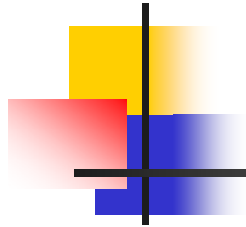
- 1) 反证法 (简捷)
- 2) 数学归纳法: 对顶点数进行数学归纳



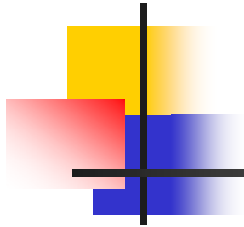
- 反证法：
 - 证明：假设 G 不是连通的，则 G 至少存在两个连通分支。设 G 有两个连通分支 C_1 和 C_2 ，则 G 的最大可能的边数 $m = x(x-1)/2 + (n-x)(n-x-1)/2$ ，其中 $1 \leq x \leq n-1$ ；所以 m 的最大 $\leq C_{n-1}^2$
- 所以导致矛盾，则 G 是连通的。

- 
- 4. 设 $G=(V, E)$ 是连通简单图, 但不是完全图, 则存在3个结点 u 、 v 和 w , 使 $(u, v), (v, w) \in E$, 但 $(u, w) \notin E$ 。

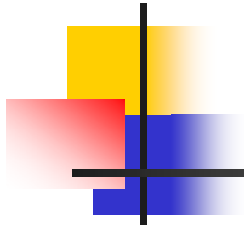
- /*中国科学院计算所1993考研



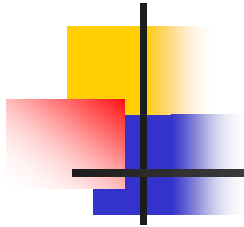
- 证明方法:
- 1) 反证法
- 2) 数学归纳法



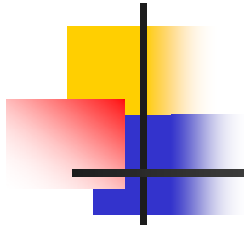
- 5. 设 G 为非平凡有向图， V 为 G 的结点集合，若对 V 的任一非空子集 S ， G 中起始结点在 S 中，终止结点在 $V-S$ 中的有向边至少有 k 条，则称 G 是 k 边连通的。
- 证明：非平凡有向图是强连通的充要条件为它是一边连通的。
- /*中国科学院计算所1999考研



- 证明：
- /*必要性证明*/
- 因为设**G**为强连通的，假设从**S**到**V-S**没有有向边，则**S**中的任一顶点**u**到**V-S**中的任一顶点**v**均没有有向道路，从而与**G**为强连通的相矛盾。所以从**S**到**V-S**至少有一条有向边，即**G**为一边连通的。

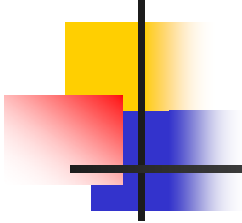


- /*充分性证明*/
- 设 G 为一边连通的，对任意的 $u, v \in V$ ，则 $\{u\}$ 到 $V(G-u)$ 至少有一条边，设为 (u, u_1) ，而 $\{u, u_1\}$ 到 $V-\{u, u_1\}$ 至少有一条有向边 (u, u_2) 或 (u_1, u_2) 。无论哪种情况都有从 u 到 u_2 的有向道路，因为 G 中结点数有限，所以通过如上递归地求解，一定有从 u 到 v 的有向道路。所以 G 为强连通的。

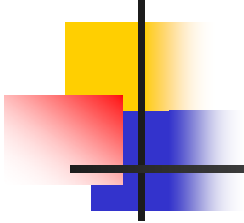


- 6. 设简单平面图 G 中顶点数 $n=7$ ，边数 $e=15$ ，证明 G 是连通的。

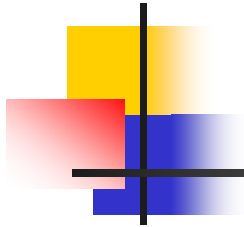
- 提示：反证

- 
- 7.简单图 G 由图 H 和两个孤立点组成, 图 H 不含孤立点, G 为平面图, 证明 H 为连通图。

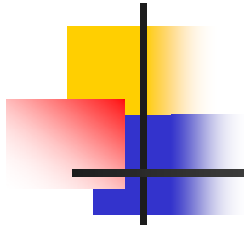
- (中国科学院软件所1994考研)

- 
- 8. 若G为简单图, 且 $m > C_{n-1}^2$, 则G是连通的. 其中m和n分别为该图的边数和顶点数. 给出一个有n个结点而不连通的简单图, 其边数恰好为 C_{n-1}^2 .

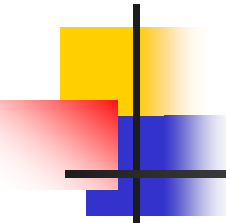
- /*华中科技大学2000考研

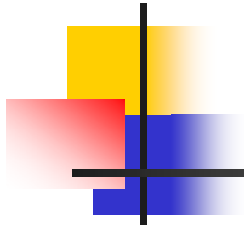


- 9. 能否画一个简单无向连通图，使各结点的度数与下面给出的序列一致？如可能，则画出符合条件的图，所画图是二分图？如不能，则说明原因。
 - (1) 1, 2, 3, 2, 1, 1
 - (2) 1, 1, 2, 3, 2, 2
 - (3) 1, 2, 3, 4, 5, 5
 - (4) 2, 2, 2, 3, 3, 4
 - (西南交大1995考研)



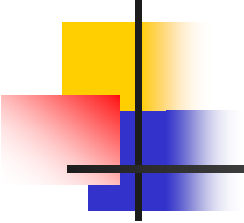
- (1) $V_1 = \{a, c, e\}$, $V_2 = \{b, d, f\}$.
- (2) 不可能画出图。(顶点度数之和为偶数)
- (3) 不可能画出图和二分图。由于有两个结点的度数为5，则该两个结点的度数必与其余5个结点有边相连（因为是简单图），所以其余4个结点度数至少为2，但有一个结点的度数为1。
- (4) (1, 6, 4, 5, 6, 1)，回路长度为奇数，所以不是二分图。

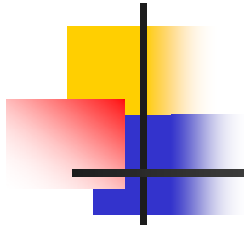
- 
-
- 10 设图 G 有 n 个结点， r 个连通分支，则图 G 的路径矩阵的秩为 $n-r$ 。



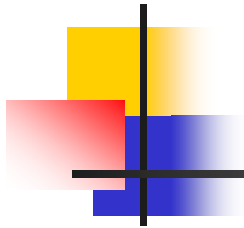
- 证明：设图 G 的 r 个连通分支为 G_1, G_2, \dots, G_r 。得分块路径矩阵如下：

$$P(G) = \begin{pmatrix} P(G_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(G_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & P(G_r) \end{pmatrix}$$

- 
-
- 因为 G_i 是连通图， G_i 的秩是连通分支 G_i 的结点个-1，所以 $\text{rank}(G)=\sum \text{rank}(G_i)=n-r$ 。

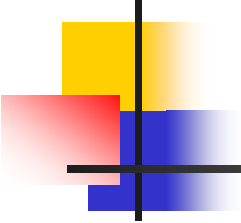


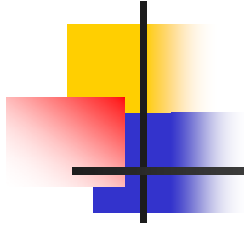
- 本题背景:
- 1 线性相关/线性无关
- 如果对 m 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in F^m$, 有 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m \in F$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0_n$ 成立, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关; 否则, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关。



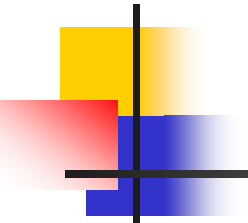
- 2 向量组的秩

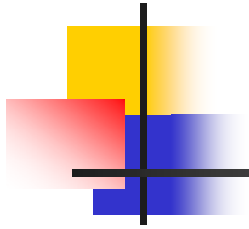
- 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在 r 个线性无关的向量，且其中任一个向量可由这 r 个线性无关的向量线性表示，则数 r 称为 向量组的秩，记作 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} = r$ 。

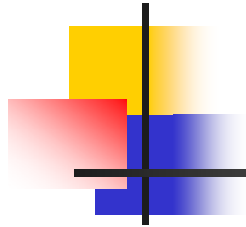
- 
- 9. 若图 $G=(V, E)$ 是连通图, 且 $e \in E$, 证明:
 - (1) e 属于每一棵生成树的充要条件是 $\{e\}$ 为 G 的割集;
 - (2) e 不属于 G 的任何一棵生成树的充要条件是 e 为 G 中的环。
 - 提示: 反证



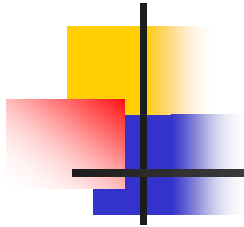
- 分析:
- (1) e 属于每一棵生成树, 要证 G 删去 e 后必不连通, 否则矛盾。
- (2)

- 
- 证明：（1）
 - \Rightarrow ： e 属于每一棵生成树，若 $\{e\}$ 不是 G 的割集， $G-e$ 连通，则 $G-e$ 中必存在生成树 T ，因为 T 也是 G 的生成树，但 T 不包含 e ，导致矛盾。
 - \Leftarrow ： 设 $\{e\}$ 不是 G 的割集，若有 G 的生成树 T ，则 $T+e$ 包含回路。则删去 e 后连通，则与 $\{e\}$ 是 G 的割集的假设矛盾。

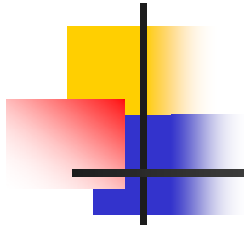




-
- 15. 具有 ω ($\omega \geq 2$)棵树的森林, 恰巧加多少新边能使森林变树?



- n 个结点, $\omega(\omega \geq 2)$ 棵树, $n-\omega$ 条边
- n 个结点的树, $n-1$ 条边
- $(n-1) - (n-\omega) = \omega-1$



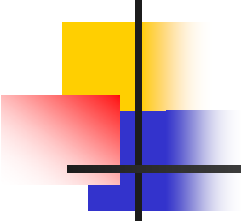
- 16. 已知 n 个结点 ($n \geq 2$) 的简单无向图 G 具有 $n-1$ 条边, G 是树吗?

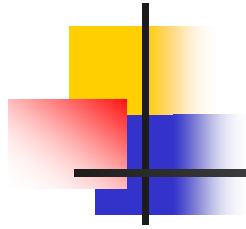
- 提示: 定义7.1 定理7.1



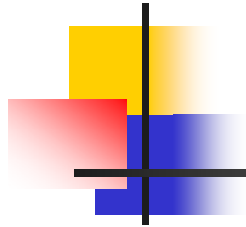
四、欧拉图和哈密顿图

- 1 证明：在无有向回路的竞赛图 $G=(V, E)$ 中，对任意的 $u, v \in V$, $d^+(u) \neq d^+(v)$ 。
- /*中国科学院软件所*/
- /*反证*/

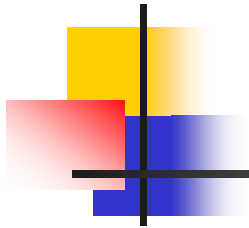
- 
- 证明：假设G中存在两个顶点 u, v ， $d^+(u) = d^+(v)$ 。因为G是竞赛图，所以设 $(u, v) \in E$ ，在G中存在顶点 w ，使得 $(v, w) \in E$ ， $(u, w) \notin E$ 。所以，根据竞赛图的性质， $(w, u) \in E$ 。则构成有向回路 u, v, w, u 。导致矛盾。所以命题成立。



-
- 证明欧拉图：按照充要条件



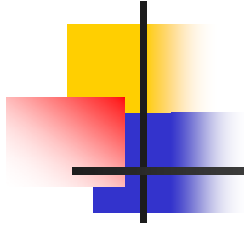
- 证明哈密顿图：抽象图，充分条件或必要条件；具体图，比较困难





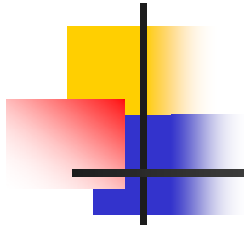
五、图的着色

- 四色猜想和五色定理相对平面图而言
- 上海交通大学4次考到五色定理的证明
- 顶点着色

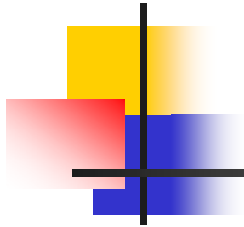


- 1 图 $G(V, E)$ 称为 k 色临界图是指，对任意 $v \in V$ ，均有 $\chi(G-v) < \chi(G) = k$ 。
- 证明：在 k 色临界图中， $\delta(G) \geq k-1$ ，其中 $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$ 。

- 中国科学院软件所1995



- 证明： /*反证法*/
- 若在图 G 中存在 $v_0 \in V$ ， $d(v_0) \leq k-2$ 。因为 G 是 k 色临界图，所以对 $G-v_0$ 可作 $k-1$ 正常着色。又因为在 G 中与 v_0 邻接的结点个数 $\leq k-2$ ，所以在 $G-v_0$ 中对这些邻接点至多用 $k-2$ 种颜色，即至少还有 $k-1$ 种颜色中的一种未使用。在 G 中用这种颜色对 v_0 着色，其他结点着色与 $G-v_0$ 相同，所以得到 G 的 $k-1$ 正常着色，与 $\chi(G)=k$ 矛盾。



- 2 对于图 G , $\chi(G)=k$, 则 G 中至少有 $k(k-1)/2$ 条边。

- 中国科学院计算所1998

