图论习题

考研习题与经典习题

2004-5

- 一、握手定理的应用
- 二、平面图、欧拉公式的应用
- 三、图的基本概念与应用
- 四、欧拉图和哈密顿图
- 五、图的着色

一、握手定理的应用

- 1. 已知具有n个度数都为3的结点的简单图G有e条边，
- （1）若e=3n-6，证明G在同构意义下唯一，并求e，n。
- （2）若n=6，证明G在同构意义下不唯一。

- 提示：握手定理（北师大2000考研）

- 解：
- （1）由握手定理，3n=2e; 因为e=3n-6，所以n=4，e=6。这样的图是完全图K_4，所以在同构的意义下唯一。
- （2）由握手定理，3*6=2e；e=9。在同构的意义下不唯一。

- 2. 无向图G有21条边，12个结点度数为3，其余结点度数为2，求G的顶点数。

- 提示：握手定理（北大2001考研）

- 解：

$$\sum_{i=1}^{n} dev(v_i) = 2e = 2 \times 21 = 42$$

$$12 \times 3 + (n - 12) \times 2 = 42$$

$$n = 15$$

3. 已知n个结点的简单图G有e条边，各结点度数为3，2n=e+3。试画出满足条件的所有不同构的G。

- 提示：握手定理（西南交大2000考研/北京大学1990考研）
- 参考1(2)

- 解：由握手定理，$e=(3n/2)$；由已知，$e=2n-2$；所以$n=6$，$e=9$。
- 在同构意义下G不是唯一的。

- 4. 设树T有17条边，12片树叶，4个4度内结点，1个3度内结点，求T的树根的度数。

- （提示：握手定理。北大1997考研）

- 解：结点数为17+1=18

由握手定理，$12*1+4*4+1*3+1*l=34$，$l=3$.

- 5. 设无向树T有3个3度，2个2度结点，其余结点都是树叶，问T有几片树叶？

- 握手定理

- 6. 证明：在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友。

- */*等价于：至少有两个顶点的简单图有两个相同度数的顶点*
- */*中国科学院自动化所1998考研*

二、平面图、欧拉公式的应用

- 1，关于平面图的不等式的证明

欧拉公式及其推论的运用

- 2，非平面图的判定

应用库拉托斯基定理

- 1. 设G是n个结点的连通简单平面图，若$n \geq 3$，则G中必有一个结点度数不超过5。

- 提示：涉及度数，握手定理；连通平面图，欧拉公式；简单平面图，若$n \geq 3$，欧拉公式的推论
- （西南交大1999考研）

- 证明：

握手定理：$\sum dev(v_i)=2e$;

反证：设每个结点的度数超过5，即 $dev(v_i)\geq 6$，则$2e=\sum dev(v_i)\geq 6n$，所以 $e\geq 3n$.

由欧拉公式的推论，$e\leq 3n-6$。

所以矛盾。

- 2. 证明彼得森图是非平面图。
- 提示：要证明一个图不是平面图，首先考虑应用库拉托斯基定理。即在要判别的图中，找出一个K_5或$K_{3,3}$的剖分。
- （西安交通大学1997考研）

- 3. 证明小于30条边的简单平面图G中，至少有一个度数小于等于4的结点。

- 证明：不妨设G是连通图。

  因为$e \le 3n-6$，假设所有顶点度数大于等于5；由握手定理，$\sum dev(v_i)=2e$;

  所以$2e \ge 5n$，则有$n \le 2e/5$。

  代入$e \le 3n-6$，则$e \le 6e/5-6$, 从而$e \ge 30$。所以矛盾。

- 4. 证明在简单平面图G中，f和n分别表示该图的面数和结点数，
- (1) 如果$n\geq 3$，则$f\leq 2n-4$。
- (2) G中结点最小的度$\delta(G)=4$，则G中至少有6个结点的度数小于等于5。
- （西安交通大学1996考研）

- （1）证明：假设图中的边数为e。由于简单图的每个面至少由3条边围成，因此$3f\leq 2e$。由欧拉公式$n-e+f=2$，得$e=n+f-2$；代入$3f\leq 2e$得到$3f\leq 2(n+f-2)$，得$f\leq 2n-4$。

- （2）证明：（反证法）
- 假设G中至多有5个结点的度数小于等于5。因为$\delta(G)=4$，则$\Sigma d(v) \geq 5 \times 4+6(n-5)$。因为$\Sigma d(v)=2e$，则$e \geq 3n-5$。由(1)，$e \leq 3n-6$。

- 5. 设G是由n个结点，e条边，ω(ω≥2)个连通分支的平面图，G的每个面至少由k（k≥3）条边围成，则
- $$e \leq \frac{k(n-\omega-1)}{k-2}$$

- 证明：设G的面数为f，各面的度数之和为T，$T=2e$。因为G的每个面至少由k条边围成，所以$k*f \le T=2e$。由欧拉公式的推广，$f=\omega+1+e-n$, $k*(\omega+1+e-n) \le 2e$.
- 所以命题成立。

三、图的基本概念与应用

- 1. 补图
- 2. 连通性

补图

- 1. 证明无向图G是不连通的，则它的补图是连通的。

- 提示：分而治之（西南交大1999考研）
- 证明连通的两种方法：直接证明，反证法

- 证明：设$G=(V, E)$, 根据连通分支将V划分为$\{V_1, V_2, \ldots\ldots, V_n\}$，并设$V_i=\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$，$V_j=\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$，$i\neq j$，$1\leq i,j\leq n$，$E_k$表示完全图的边集。
- 任取V中两个结点，分两种情况讨论：
- （1）设$u_i\in V_i$, $v_j\in V_j$. $(u_i, v_j)\notin E$, 则$(u_i, v_j)\in E_k-E$. 所以u_i, v_j是连通的。即在不同连通分支中的两个结点在补图中是连通的。
- （2）设u_i, $u_j\in V_i$, $v_j\in V_j$. 由(1)，$(u_i, v_j)\in E_k-E$, $(u_j, v_j)\in E_k-E$. 所以u_i, u_j通过v_j连通。即在相同连通分支中的两个结点在补图中是连通的。
- 所以，命题成立。

- 2. 一个图如果同构于它的补图, 则该图称为自补图.
- 1)试给出一个5个结点的自补图;
- 2)证明: 一个图是自补图, 其对应的完全图的边数必是偶数;
- 3)是否有3个结点或者6个结点的自补图.

- 2)证明：如果一个图是自补图，设该图的边数为e，则该图的自补图的边数也为e，所以对应的完全图的边数是2e，为偶数。

- 3)解：3个结点或者6个结点的完全图的边数分别为3和15，是奇数；所以不存在3个结点或者6个结点的自补图。

连通性

- 证明连通的两种方法: 直接证明/反证法.
- 证明连通的直接证明方法：任取图中两点，寻找这两点间必定存在路。
- 证明连通的反证法: 首先假设图不连通，则它具有多个连通分支，然后根据题目条件推出矛盾。推矛盾的过程，通常是将具有多个连通分支的图的边数放到最大的过程（放缩法），即使每个连通分支都是完全图，然后推出边仍然不满足条件。

- 1. n个结点的简单图G，n>2且n奇数，G和G补图中度数为奇数的结点个数是否相等？请证明或给出反例。

- （西南交大2001考研）

- 解：一定相等。
- 因为n>2且n奇数，则对于奇数个结点的完全图，每个结点的度数必为偶数。若G中度数为奇数的结点个数是m，则G的补图中m个结点的度数为（偶数-奇数）=奇数。 G中度数为偶数的结点，在G的补图中这些结点的度数仍为（偶数-偶数）=偶数。
- 所以命题成立。

- 2. 设无向图G有n个结点，$n \geq 2$。证明：
- 1）当$\delta(G) \geq n/2$时，G是连通图；
- 2）当$\delta(G) \geq (1/2)(n+k-1)$时，$G$是$k$-连通图，其中$1 \leq k \leq n-1$。
- (北京大学1994年考研)

- 3. 若G为简单图，且$m > C_{n-1}^{2}$，则G是连通的。其中m和n分别为该图的边数和顶点数。

- /*中国科学院自动化所1998考研

- 证明方法：
- 1）反证法（简捷）
- 2）数学归纳法：对顶点数进行数学归纳

- 反证法：
- 证明：假设*G*不是连通的，则*G*至少存在两个连通分支。设*G*有两个连通分支C_1和C_2，则G的最大可能的边数m=x(x-1)/2+(n-x)(n-x-1)/2，其中1≤x≤n-1；所以m的最大≤ C_{n-1}^{2}

  所以导致矛盾，则*G*是连通的。

- 4. 设$G=(V, E)$是连通简单图，但不是完全图，则存在3个结点u、v和w，使$(u, v), (v, w)\in E$，但$(u, w)\notin E$。

- /*中国科学院计算所1993考研

- 证明方法：
- 1）反证法
- 2）数学归纳法

- 5. 设G为非平凡有向图，V为G的结点集合，若对V的任一非空子集S，G中起始结点在S中，终止结点在V-S中的有向边至少有k条，则称G是k边连通的。
- 证明：非平凡有向图是强连通的充要条件为它是一边连通的。

- /*中国科学院计算所1999考研

- 证明：
- /*必要性证明*/
- 因为设G为强连通的，假设从S到V-S没有有向边，则S中的任一顶点u到V-S中的任一顶点v均没有有向道路，从而与G为强连通的相矛盾。所以从S到V-S至少有一条有向边，即G为一边连通的。

- /*充分性证明*/
- 设G为一边连通的，对任意的u, v$\in$V, 则{u}到V(G-u)至少有一条边，设为(u, u_1)，而$\{u, u_1\}$到V-$\{u, u_1\}$至少有一条有向边(u, u_2)或(u_1, u_2)。无论哪种情况都有从u到u_2的有向道路，因为G中结点数有限，所以通过如上递归地求解，一定有从u到v的有向道路。所以G为强连通的。

- 6. 设简单平面图G中顶点数$n=7$，边数$e=15$，证明G是连通的。

- 提示：反证

- 7.简单图G由图H和两个孤立点组成，图H不含孤立点，Ğ为平面图，证明H为连通图。

- （中国科学院软件所1994考研）

- 8. 若G为简单图，且$m > C_{n-1}^2$，则G是连通的。其中m和n分别为该图的边数和顶点数。给出一个有n个结点而不连通的简单图，其边数恰好为 C_{n-1}^2 .

- /*华中科技大学2000考研

- 9. 能否画一个简单无向连通图，使各结点的度数与下面给出的序列一致？如可能，则画出符合条件的图，所画图是二分图？如不能，则说明原因。
- （1）1，2，3，2，1，1
- （2）1，1，2，3，2，2
- （3）1，2，3，4，5，5
- （4）2，2，2，3，3，4
- （西南交大1995考研）

- (1) V_1={a, c, e}, V_2={b, d, f}.
- (2) 不可能画出图。(顶点度数之和为偶数)
- (3) 不可能画出图和二分图。由于有两个结点的度数为5，则该两个结点的度数必与其余5个结点有边相连（因为是简单图），所以其余4个结点度数至少为2，但有一个结点的度数为1。
- (4) (1, 6, 4, 5, 6, 1)，回路长度为奇数，所以不是二分图。

- 10　设图G有n个结点，r个连通分支，则图G的路径矩阵的秩为n-r。

- 证明：设图G的r个连通分支为G_1, G_2, …, G_r。得分块路径矩阵如下：

$$P(G)=\begin{pmatrix} P(G_1) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & P(G_2) & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & P(G_r) \end{pmatrix}$$

- 因为G_i是连通图，G_i的秩是连通分支G_i的结点个数-1，所以 $rank(G)=\sum rank(G_i)=n-r$。

- ***本题背景：***
- 1　线性相关/线性无关
- 如果对m个向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in F^m$，有$m$个不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_m \in F$，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots\ldots+k_m\alpha_m=0_n$成立，则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$***线性相关***；否则，称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$***线性无关***。

- 2　向量组的秩
- 　　如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$中存在$r$个线性无关的向量，且其中任一个向量可由这$r$个线性无关的向量线性表示，则数$r$称为***<u>向量组的秩</u>***，记作$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}=r$。

- 9. 若图G=(V, E)是连通图，且$e \in E$，证明：
- (1)e属于每一棵生成树的充要条件是{e}为G的割集；
- (2)e不属于G的任何一棵生成树的充要条件是e为G中的环。

- 提示：反证

- 分析：
- (1) e属于每一棵生成树, 要证G删去e后必不连通，否则矛盾。
- (2)

- 证明：（1）
- ⇒：　e属于每一棵生成树, 若{e}不是G的割集，G-e连通，则G-e中必存在生成树T，因为T也是G的生成树，但T不包含e，导致矛盾。
- ⇐：设{e}不是G的割集，若有G的生成树T，则T+e包含回路。则删去e后连通，则与{e}是G的割集的假设矛盾。

- 15. 具有ω(ω≥2)棵树的森林，恰巧加多少新边能使森林变树？

- n个结点， $\omega(\omega \ge 2)$棵树，n-ω条边
- n个结点的树，n-1条边
- （n-1）-（n-ω）=ω-1

- 16. 已知n个结点（$n \geq 2$）的简单无向图G具有n-1条边，G是树吗？

- 提示：定义7.1　定理7.1

四、欧拉图和哈密顿图

- 1　证明：在无向回路的竞赛图G=(V, E)中，对任意的$u,v\in V$, $d^+(u)\neq d^+(v)$。

- /*中国科学院软件所*/
- /*反证*/

- 证明：假设G中存在两个顶点u, v， $d^+(u)=d^+(v)$。因为G是竞赛图，所以设$(u, v)\in E$, 在G中存在顶点w，使得$(v, w)\in E$, $(u, w)\notin E$。所以，根据竞赛图的性质，$(w, u)\in E$。则构成有向回路u, v, w, u。导致矛盾。所以命题成立。

- 证明欧拉图：按照充要条件

- 证明哈密顿图：抽象图，充分条件或必要条件；具体图，比较困难

五、图的着色

- 四色猜想和五色定理相对平面图而言
- 上海交通大学4次考到五色定理的证明
- 顶点着色

- 1 图G(V, E)称为k色临界图是指，对任意$v\in V$，均有$\chi(G-v)<\chi(G)=k$。
- 证明：在k色临界图中，$\delta(G)\geq k-1$，其中$\delta(G)=\min\{d(v)|v\in V\}$。

- 中国科学院软件所1995

- 证明：/*反证法*/
- 若在图G中存在$v_0 \in V$，$d(v_0) \le k-2$。因为G是k色临界图，所以对$G-v_0$可作k-1正常着色。又因为在G中与v_0邻接的结点个数≤k-2，所以在$G-v_0$中对这些邻接点至多用k-2种颜色，即至少还有k-1种颜色中的一种未使用。在G中用这种颜色对v_0着色，其他结点着色与$G-v_0$相同，所以得到G的k-1正常着色，与$\chi(G)=k$矛盾。

- 2 对于图G，$\chi(G)=k$，则G中至少有$k(k-1)/2$条边。

- 中国科学院计算所1998