第一章　事件与概率

一、填空题

1. 设 A, B, C 为三个事件，则至少发生一个可以表示为 ________，不多于两个可表示为 ________。

2. 总经理的 5 位秘书中有 3 位精通英语，今偶遇其中的两位，事件“其中有人精通英语”的概率为 ________。

3. 将 $P(A), P(AB), P(A \cup B), P(A)+P(B)$ 用不等号联系起来：________。

4. 盒子中有 4 个红球、 2 个白球，从中任取 2 只，都是红球的概率为 ________。

5. 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$， $P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{8}$， $P(ABC)=\frac{1}{16}$，则事件 A, B, C 中至少发生一个的概率为 ________，至多发生一个的概率为 ________。

6. 设 A, B 为两个事件， $P(A)=0.5$， $P(AB)=0.3$，则 $P(A\overline{B})=$ ________。

7. 袋中有黑白两种颜色的球，黑球的个数是白球的 2 倍，不放回地依次取球，则第 k 次取的白球的概率为 ________。

8. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$(a 为正常数) 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为 ________。

9. 五个同心圆的半径依次为 $kr(k=1,2,3,4,5)$。用线条画满半径为 r 的圆和内外半径分别为 $3r$ 和 $5r$ 的圆环。在半径为 $5r$ 的圆中任取一点，则该点落在半径为 $2r$ 的圆内的概率为 ________，落在划有线条的区域内的概率为 ________。

10. 在长为 L 的线段 AB 上任意地投两点 L 及 M，则 LM 的长度小于 AL 的概率为 ________。

11. 两个人随机地走进编号为 $1,2,3,4$ 的四个房间，则恰好有 1 人走进 2 号房间的概率为 ________。

12. 在 5 把钥匙中，有 2 把能把门打开，现逐把试开，则第三次恰好把门打开的概率为 ________。

13. 现有 10 件同类产品，其中 6 件正品， 4 件次品，现从中任取 3 件，则取得的 3 件中至少有 1 件次品的概率为 ________。

14. 某奖券的开奖号码有 $0\sim 9$ 这十个数字中任取 6 个数组成（数字允许重复），则由不同的 6 个数字组成开奖号码的概率为 ________。

15. 某城市有 50%的住户订日报，有 65%的住户订晚报，有 85%的住户至少订这两种报纸中的一种，那么同时订这两种报纸的住户的百分比为 ________。

16. 从 5 双不同的手套中任取 4 只，那么事件“ 4 只都不配对”的概率为 ________。

17. 如果 A, B 两事件满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=m$，则 $P(B)=$ ________。

18. 任取一正整数 N，则 N^2 的最后一位数为 1 的概率为 ________， N^4 的最后一位数为 1 的概率为 ________。

二、选择题

1. 设 A,B,C 为三个事件，下列事件中与 A 互斥的事件是 (　)

(a) $\overline{A}B\cup A\overline{C}$　　(b) $\overline{A(B\cup C)}$

(c) $\overline{ABC}$　　(d) $\overline{A\cup B\cup C}$

2. 对于两个事件 A,B ，有 $P(A-B)=$ (　)

(a) $P(A)-P(B)$　　(b) $P(A)-P(B)+P(AB)$

(c) $P(A)-P(AB)$　　(d) $P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$

3. 袋中有 5 只球 (3 红 2 白) ，每次取 1 只，无放回地取两次，则第二次取到红球的概率为 (　)

(a) $\frac{3}{5}$　　(b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$　　(d) $\frac{3}{10}$

4. 若 $A\subset B$ ， $A\subset C$ ， $P(A)=0.9$ ， $P(\overline{B}\cup\overline{C})=0.8$ ，则 $P(A_BC)=$ (　)

(a) 0.6　　(b) 0.7

(c) 0.8　　(d) 0.4

5. 3 个人被等可能地分配到 4 个房间的任一间去，则某指定的房间中恰有 2 人的概率是 (　)

(a) $\frac{3}{64}$　　(b) $\frac{3}{16}$

(c) $\frac{9}{64}$　　(d) $\frac{5}{32}$

6. 一袋中有大小相同的 7 只球，其中 4 只白球， 3 只黑球，现从中任取 3 只，事件“至少有 2 只白球”的概率是 (　)

(a) $\frac{22}{35}$　　(b) $\frac{18}{35}$

(c) $\frac{4}{35}$　　(d) $\frac{4}{7}$

7. 若两个事件 A 与 B 同时出现的概率 $P(AB)=0$ ，则 (　)

(a) AB是不可能事件　　(b) A与B为互斥事件

(c) A与B为对立事件　　(d) AB不一定是不可能事件

8. 三封信随机地投向编号为 I,II,III,IV 的四个邮筒，则 II 号邮筒内恰好有一封信的概率是 (　)

(a) $\frac{9}{32}$　　(b) $\frac{9}{64}$

(c) $\frac{27}{64}$　　(d) $\frac{3}{64}$

9. 事件 A 表示“甲产品畅销，乙产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 为 (　)

(a) 甲产品滞销或乙产品畅销　　(b) 甲产品滞销

(c) 甲产品滞销且乙产品畅销　　(d) 乙产品畅销

10. 事件 A,B 互斥，且 $P(A)=0.4$ ， $P(B)=0.3$ ，则 $P(\overline{B}\,\overline{B})=$ (　)

(a) 0.12　　(b) 0.3

(c) 0.42　　(d) 0

11. 设 A 与 B 互不相容，且 $P(A)>0$ ， $P(B)>0$ ，则下列结论中肯定正确的是 (　)

(a) A 与 B 为对立事件　　(b) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容

(c) $P(A-B)=P(A)-P(B)$　　(d) $P(A-B)=P(A)$

12. 设 $\Omega=\{x\,|-\infty<x<+\infty\}$ ， $A=\{x\,|\,0\le x<2\}$ ， $B=\{x\,|\,1\le x<3\}$ ，则 $A\overline{B}=$ (　)

(a) $\{x\,|\,0\le x<1\}$　　(b) $\{x\,|\,0<x<1\}$

(c) $\{x\,|\,1\le x<2\}$　　(d) $\{x\,|-\infty<x<0\}\cup\{x\,|\,1\le x<+\infty\}$

13. 设 $P(A)=m$ ， $P(B)=n$ ， $P(A\cup B)=k$ ，则 $P(A\overline{B})$(　)

(a) $m-n$　　(b) $k-n$

(c) $m(1-n)$　　(d) $m(1-k)$

14. 在时间间隔 T 内的任何瞬间，两信号等可能地进入收音机。如果这两个信号的时间间隔小于 t ，则收音机受到干扰，则收音机受到干扰的概率为(　)

(a) $\frac{t}{T}$　　(b) $\left(\frac{t}{T}\right)^2$

(c) $1-\left(\frac{t}{T}\right)^2$　　(d) $1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$

15. 在长为 l 的线段 AB 上任意投 M,N 两点，则所得的三条线段长度都不超过某一给定值 $a\left(\dfrac{l}{3}\le a\le l\right)$ 的概率为(　)

(a) $\frac{a}{l}$　　(b) $\left(1-\frac{a}{l}\right)^2$

(c) $\left(1-\frac{3a}{l}\right)^2$　　(d) (b) 或 (c)

三、计算、证明题

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 掷一枚均匀的骰子两次，观察两次出现的点数之和；

(2) 某篮球运动员投篮时，连续 5 次都投中，观察其投篮的次数；

(3) 记录某班一次数学考试的平均成绩(已百分制记)；

(4) 一射手进行射击，直到击中时为止，观察其设计情况；

(5) 在单位圆内任选两点，观察这两点的距离；

(6) 观察某地一天内的最高气温和最低气温(假定最高气温不高于 C_1 ，最低气温不低于 C_2)。

2. 指出下列关系中哪些成立，哪些不成立：

(1) $A\cup B=A\overline{B}\cup B$;

(2) $(\overline{A\cup B})C=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(3) 若 $A\subset B$ ，则 $A=AB$ ；

(4) 若 $A\subset B$ ，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$ ；

(5) 若 $AB=\varnothing$ ，且 $C\subset A$ ，则 $BC=\varnothing$;

(6) $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$;

(7) $\overline{A}B=A\cup B$ 。

3. 箱中有 3 件同样的产品，分别标有 1,2,3 号，试写出下列随机试验的样本空间，并说明哪些是古典概型。

(1) 从箱中任取两件；

(2) 从箱中任取一件，不放回箱中，再任取一件；

(3) 从箱中任取一件，放回箱中，再任取一件；

(4) 从箱中不放回地接连抽取产品，直到取到 1 号产品。

4. 若 A ，B ，C 是随机事件，说明下列关系式的概率意义：(1) $ABC=A$ ；(2) $A\cup B\cup C=A$ ； (3) $AB\subset C$ ； (4) $A\subset\overline{BC}$ 。

5. 在某班学生中任选一个同学，以事件 A 表示选到的是男同学，事件 B 表示选到的人不喜欢唱歌，事件 C 表示选到的人是运动员。(1) 表述 $AB\overline{C}$ 及 $A\overline{B}C$ ； (2) 什么条件下成立 $ABC=A$ ； (3) 何时成立 $\overline{C}\subset B$ ； (4) 何时同时成立 $A=B$ 及 $\overline{A}=C$ 。

6. 靶子由 10 个同心圆组成，半径分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_{10}$ ，且 $r_1<r_2<\cdots<r_{10}$ ，以事件 A_i 表示命中点在半径为 r_i 的圆内，试叙述下列事件的意义。

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{6}A_i$ ；　　(2) $\bigcap\limits_{i=1}^{8}A_i$ ；　　(3) $\overline{A_2}A_3$ 。

7. 试证：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 + \cdots + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cdots\overline{A}_{n-1}A_n$$

并对 $n=4$，画出文图。

8. 为“剪刀 · 石头 · 布”游戏造一个样本空间，定义有关事件，并考虑如何给定概率。

9. 若 A， B， C， D 是四个事件，试用这四个事件表示下列各事件： (1) 这四个事件至少发生一个； (2) A， B 都发生而 C， D 都不发生； (3) 这四个事件恰好发生两个： (4) 这四个事件都不发生； (5) 这四个事件中至多发生一个。

*10. 从 0， 1， 2， $\cdots$， 9 中随机地取出 5 个数（可重复），以 E_i 记某些数正好出现 i 次这一事件（例如 52353，既属于 E_1，也属于 E_2 及 E_0），试用文图表示 E_0， E_1， $\cdots$， E_6 的关系。

11. 证明下列等式：

(1) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

(2) $\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0$

(3) $\sum_{k=0}^{a-r}\binom{a}{k+r}\binom{b}{k}=\binom{a+b}{a-r}$

12. 有 50 件产品，其中有 5 件次品，其余均为正品，现从中任取 3 件，试求：

(1) 取到 2 件次品的概率；

(2) 至少有 1 件次品的概率；

(3) 至少有 2 件次品的概率；

13. 从 $0\sim 9$ 这十个数字中任意选出三个不同的数字，试求下列事件的概率：

(1) 三个数字中不含 0 与 5；

(2) 三个数字中不含 0 或不含 5；

(3) 三个数字中含 0 但不含 5。

14. 盒子中有 10 个球，分别标有 $1\sim 10$ 的号码，现任取 3 只，记录其号码。试求下列事件的概率：

(1) 最小号码为 5；

(2) 最大号码为 5；

(3) 至少有一个号码小于 6；

(4) 一个号码小于 5，一个号码等于 5，一个号码大于 5。

15. 某城市发行 A, B, C 三种报纸，经统计，订阅 A 报的有 45 %的住户，订阅 B 报的有 35 %的住户，订阅 C 报的有 30 %的住户，同时订阅 A 报与 B 报的有 10 %，同时订阅 A 报与 C 报的有 8 %，同时订阅 B 报与 C 报的有 5 %，同时订阅 A, B, C 报的有 3 %。试求下列事件的概率：

(1) 只订阅 A 报的；

(2) 只订一种报纸的；

(3) 正好订两种报纸；

(4) 至少订阅一种报纸；

(5) 不订阅任一种报纸；

(6) 至多订阅一种报纸。

16. 现有 10 本书，其中含两套书，一套 3 卷，另一套 4 卷，任意地把它们放到书架上排成一排，求下列事件的概率：

(1) 3 卷一套的放在一起；

(2) 两套各自放在一起；

(3) 两套中至少有一套放在一起；

(4) 两套各自放在一起，还必须按卷次顺序排号。

17. 从编号为 $1,2,\cdots,10$ 的十张卡片中任取一张，有放回地先后取 7 次，每次记下号码。求下列事件的概率：

(1) 7 个编号全不相同；

(2) 编号不含 10 和 1 ；

(3) 编号 10 恰好出现两次；

(4) 编号 10 至少出现两次。

18. 袋中有 n 只球，记有号码 $1,2,\cdots,n$ ，求下列事件的概率：(1) 任意取出 2 球，号码为 1 ， 2 ； (2) 任意取出 3 球，没有号码 1 ； (3) 任意取出 5 球，号码 1 ， 2 ， 3 中至少出现 1 个。

19. 袋中装有 $1,2,\cdots,N$ 号的球各一只，采用 (1) 有放回； (2) 不放回方式摸球，试求在第 k 次摸球时首次摸到 1 号球的概率。

20. 一块各面均涂有油漆的正方体被锯成 1000 个同样大小的小正方体。从这些小正方体中任取一个，求这一小正方体的两面涂有油漆的概率。

21. 任取一整数 N ，求 N^3 的最后两个数字均为 1 的概率。

22. 从数 $1,2,\cdots,n$ 中任取两个，求所得两数之和为偶数的概率。

23. 从 $0,1,\cdots,9$ 中任取有放回地连取 4 个数，并按出现的先后次序排列，求下列事件的概率：

(1) A_1: 四个数字组成一四位数；

(2) A_2: 四个数字组成一四位偶数；

(3) A_3: 四个数字中 0 恰好出现两次；

(4) A_1: 四个数字中 0 至少出现一次。

24. 一部电梯从底层开始启动时有 6 位乘客，设每位乘客在十层楼的任何一层离开的可能性相同。试求下列事件的概率：

(1) A: 某指定的一层有两位乘客离开；

(2) B: 没有两位及两位以上的乘客在同一层离开；

(3) C: 恰有两位乘客在同一层离开；

(4) D: 至少有两位乘客在同一层离开。

25. 从 6 双不同的手套中任取 4 只，问其中恰有一双配对的概率是多少？

26. 从 $1\sim 9$ 这九个正整数中，有放回地取 3 次，每次任取一个，求所得到的三个数之积能被 10 整除的概率。

27. m 个男孩和 n 个女孩（ $n\le m$ ）随机地沿着圆桌坐下，试求任意两个女孩都不相邻的概率。

28. （分赌注问题）甲、乙二人各出赌注 a ，约定谁先胜三局则赢得全部赌注，现已赌三局，甲二胜一负，这时因故中止赌博，若二人赌技相同，问应如何分配赌注，才算公平合理？

29. 从 52 张扑克牌中任意取出 13 张，求：(1) 有 5 张黑桃， 3 张红心， 3 张方块， 2 张草花的概率； (2) 牌型分布为 7-3-2-1（最长花色有 7 张，最短花色有 1 张，其余二花色分别有 3 张及 2 张）的概率。

30. 桥牌游戏中（四人各从 52 张纸牌中分得 13 张），求 4 张 A 集中在一个人手中的概率。

31. 从一副扑克牌的 13 张黑桃中，一张接一张地有放回地抽取 3 张。求下列事件的概率：

(1) 没有同号；

(2) 有同号；

(3) 至多有两张同号。

*32. 在扑克牌游戏中（从 52 张牌中任取 5 张），求下列事件的概率： (1) 以 A 打头的同花顺次五张牌； (2) 其他同花顺次五张牌； (3) 有四张牌同点数； (4) 三张同点数且另两张也同点数； (5) 五张同花； (6) 异花顺次五张牌； (7) 三张同点数，另外两张不同点数；(8) 五张中有两对； (9) 五张中有一对； (10) 其他情况。

33. 从一副扑克牌中有放回地一张张抽取，求在抽取第 6 张时得到全部 4 种花色的概率。

34. 若 $P(A)=0.5$， $P(B)=0.4$，且 $P(A-B)=0.3$，求

(1) $P(A\cup B)$；　　(2) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$。

35. 设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{2}$，在下列三种不同情况下分别求 $P(B\overline{A})$ 的值。

(1) A 与 B 互斥时；　　(2) 当 $A\subset B$ 时　　(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$。

36. 从装有号码 $1,2,\cdots,N$ 的球的箱子中有放回地摸了 n 次球，依次记下其号码，试求这些号码按严格上升次序排列的概率。

37. 在上题中这些号码按上升（不一定严格）次序排列的概率。

38. 任意从数列 $1,2,\cdots,N$ 中不放回地取出 n 个数并按大小排列成： $x_1<x_2<\cdots<x_m<\cdots<x_n$，试求 $x_m=M$ 的概率。这里 $1\le M\le N$。

*39. 上题中，若采用有放回取数，这时 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_m\le\cdots\le x_n$，试求 $x_m=M$ 的概率。

40. 袋中有 a 只黑球和 b 只白球，从袋中每次无放回地摸出一球，直到袋中剩下的球全是同颜色为止，求剩下的全为黑球的概率。

41. 从 n 双不同的鞋子中任取 $2r(2r<n)$ 只，求下列事件的概率：

(1) 没有成对的鞋子；

(2) 只有一对鞋子；

(3) 恰有两对鞋子；

(4) 有 r 对鞋子。

42. 口袋中有 $n-1$ 只黑球及 1 只白球，每次从袋取出一球，并换入 1 只黑球，如此继续下去。求第 k 次取到黑球的概率。

43. 从 $1,2,\cdots,N$ 中每次有放回地任取一数，共取 $k(1\le k\le N)$ 次，求下列事件的概率：

(1) A:k 个数字全不相同；

(2) B: 不含 $1,2,\cdots,N$ 中指定的某 r 个数字；

(3) C: 某指定的一个数字恰好出现 $m(m\le k)$ 次；

(4) D:k 个数字中的最大数为 $M(1\le M\le N)$;

(5) E:k 个数字严格上升。

44. 甲、乙、丙三人按下面的规则进行比赛，第一局甲、乙参加而丙轮空，由第一局的优胜者与丙进行第二局比赛，而失败者轮空，比赛用这种方式进行到其中一人连胜两局为止，连胜两局者为整场比赛的优胜者，若甲、乙、丙胜每局的概率均为 $\frac{1}{2}$，问甲、乙、丙成为整场比赛的优胜者的概率各是多少？

45. 从 $(0,1)$ 中随机地取两个数，求下列概率： (1) 两数之和小于 1.2； (2) 两数之积小于 0.25； (3) 以上两个要求同时满足。

46. 从 $(0,1)$ 中随机地取二数 b 及 c，试求方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率。

47. 在一张打上方格的纸上投一枚直径为 1 的硬币，方格要多小才能使硬币与线不相交的概率小于 1% 。

48. 某码头只能容纳一只船，现预知某日将独立来到两只船，且在 24 小时内各时刻来到的可能性都相等，如果它们需要停靠的时间分别为 3 小时及 4 小时，试求有一船要在江中等待的概率。

49. 两人约定于 7 点到 8 点在某地会面，试求一人要等另一人半小时以上的概率。

50. 在一线段 AB 中随机地取两个点把线段截为三段，求这三段可以构成一个三角形的概率（三线段能构成三角形的充要条件是任意二边之和大于第三边）。

51. 在线段 $[0,1]$ 上任意投三个点，问由 0 至三点的三线段能构成三角形与不能构成三角形这两个事件中哪一个事件的概率大。

52. 在水平面上沿直线 AB 垂直地摆着一些半径为 r 的相同的圆柱体，其中心之间的间隔为 l 。以角度 α 向直线投一半径为 R 的球。如果球的运动轨迹与直线 AB 等可能地相交于任何一点，求球与圆柱体相碰的概率。

53. 在半径为 R 的圆周上作 A,B,C 三点，三角形 ABC 为锐角三角形的概率为多少？

54. 设 A_1,A_2,A_3 以及 A 均为随机事件。

(1) 如果当 A_1 与 A_2 同时发生时 A 必发生，证明

$$P(A) \geq P(A_1)+P(A_2)-1;$$

(2) 如果 $A_1A_2A_3 \subset A$ ，证明

$$P(A) \geq P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2.$$

55. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是随机事件，试用归纳法证明下列公式：

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_iA_j) \\ &+ \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned}$$

56. 某班有 N 个士兵，每人各有一支枪，这些枪外形完全一样，在一次夜间紧急集合中，若每人随机地取走一支枪，问至少有一个人拿到自己的枪的概率。

*57. 在上题中求恰好有 $k\,(0\leq k\leq N)$ 个人拿到自己的枪的概率。

58. 考试时共有 N 张考签， n 个学生参加考试 $(n\geq N)$ ，被抽过的考签立刻放回，求在考试结束之后，至少有一张考签没有被抽到的概率。

*59. 利用概率论的想法证明下列恒等式：

$$1+\frac{A-a}{A-1}+\frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)}+\cdots+\frac{(A-a)\cdots 2\cdot 1}{(A-1)\cdots(a+1)a}=\frac{A}{a}$$

其中 A ， a 都是正整数，且 $A>a$ 。

*60. 从一只装有 100 只灯泡的箱子中任抽 5 只灯泡，发现有 2 只是次品，你对此批灯泡的次品数作何估计？（这种抽查当然用不放回方式。比较用最大似然估计法所得结果与用频率估计概率法的结果是否相同。）

*61. （赠券收集）食品厂把印有水浒 108 将之一的画卡作为赠券装入某种儿童食品袋中，每袋一卡，试求购买 n 袋这种食品而能收齐全套画卡的概率。

*62. 用概率论想法求 N 阶行列式的展开式中包含主对角线元素的项数。

63. 有 w 只白球与 b 只黑球任你放入两个袋子中，让你的朋友随机抽一袋并从中摸出一只球，你将如何做以使你的朋友摸得黑球的概率最大。

^{*64}. 甲，乙，丙三人按下面规则进行比赛，第一局由甲，乙参加而丙轮空，由第一局的优胜者与丙进行第二局比赛，而失败者则轮空，比赛用这种方式一直进行到其中一个人连胜两局为止，连胜两局者成为整场比赛的优胜者，若甲，乙，丙胜每局的概率各为 $\frac{1}{2}$ ，问甲，乙，丙成为整场比赛优胜者的概率各是多少？

^{*65}. 父，母，子三人举行比赛，每局总有一人胜一人负（没有和局），每局的优胜者就与未参加此局的人再进行比赛，如果某人首先胜了两局，则他就是整个比赛的优胜者，由父决定第一局由哪两人参加，其中儿子实力最强，所以父为了使自己得胜的概率达到最大，就决定第一局由他与妻子先比赛，试证父的决策为最优策略（任何一对选手中一人胜对方的概率在整个比赛中是不变的）。

66. 给定 $p=P(A)$ ， $q=P(B)$ ， $r=P(A\cup B)$ ，求 $P(A\overline{B})$ 及 $P(\overline{A}\,\overline{B})$ 。

67. 设 p_1 ， p_2 ， p_{12} 是给定的实数，试证存在两个事件 A_1 及 A_2 使得 $P(A_1)=p_1$ ， $P(A_2)=p_2$ ， $P(A_1A_2)=p_{12}$ 的充要条件是下列四个不等式同时成立：

$$p_{12}\geq 0,\quad p_1-p_{12}\geq,\quad p_2-p_{12}\geq 0,\quad 1-p_1-p_2+p_{12}\geq 0$$

68. 证明： $\big|P(AB)-P(A)P(B)\big|\leq\frac{1}{4}$ ，并讨论等号成立的条件。

69. 求包含事件 A ， B 的最小 σ 域。

70. 证明： (1) Ω 的一切子集组成的集类是一个 σ 域； (2) σ 域之交仍为 σ 域。

71. 证明：包含一切形为 $(-\infty,\,x)$ 的区间的最小 σ 域是一维博雷尔 σ 域。

72. (1) 设 Q 是定义在 σ 域上的非负广义实值函数（即可以取有限或无限值的函数），如果它具有可列可加性，并且 $Q(\varnothing)=0$ ，则称 Q 为 **测度** ，试说明测度概念是算术中计数概念及几何中长度、面积、体积等概念的推广； (2) 用测度概念解释古典概型、几何概率及概率论公理化结构中关于概率的定义。

73. 试证：概率定义 1.5.2 中的三个要求可用下列两个要求代替：

(i) $P(A)\geq 0$ ，对一切 $A\in\mathcal{F}$ ；

(ii) 若 $A_i\in\mathcal{F},\ i=1,2,\cdots$ ，两两互不相容，且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$ ，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)=1$ 。