概 率 论 基 础

张 新 生

Email: xszhang@fudan.edu.cn

复旦大学

December 3, 2010

第四章 数字特征与特征函数

数字特征的引入背景

数字特征的引入背景

（1）实际问题的需要

数字特征的引入背景

（1）实际问题的需要

（2）要完全得到分布有困难

数字特征的引入背景

（1）实际问题的需要

（2）要完全得到分布有困难

（3）数字特征从某些侧面反映分布函数

数学期望的定义

A. 离散型随机变量

数学期望的定义

A. 离散型随机变量

设离散随机变量X的分布列为

$$P(X = x_n) = p_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

若级数$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$绝对收敛，则称该级数为$X$的数学期望，记为

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

例4.1.1

$X \sim B(n,p)$, 求$E(X)$.

例4.1.1

$X \sim B(n,p)$, 求$E(X)$.

解:

$$E(X) =$$

例4.1.1

$X \sim B(n,p)$, 求$E(X)$.

解:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=$$

例4.1.1

$X \sim B(n,p)$, 求$E(X)$.

解:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=$$

例4.1.1

$X \sim B(n,p)$, 求$E(X)$.

解:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{(n-1)-k} = np$$

特例 若$Y \sim B(1,p)$,

例4.1.1

$X \sim B(n,p)$, 求$E(X)$.

解:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{(n-1)-k} = np$$

特例 若$Y \sim B(1,p)$, 则$E(Y) = p$

数学期望的定义

B.连续性随机变量

数学期望的定义

B.连续性随机变量

设连续随机变量X的密度函数为$p(x)$,若积分$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$绝对收敛，则称该积分为$X$的数学期望，记为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

例4.1.2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$E(X)$.

解:

$$E(X) =$$

例4.1.2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$E(X)$.

解:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\xlongequal{\frac{x-\mu}{\sigma}=u}$$

例4.1.2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$E(X)$.

解:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{\frac{x-\mu}{\sigma}=u}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (u\sigma + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

例4.1.2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$E(X)$.

解:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{\frac{x-\mu}{\sigma}=u}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (u\sigma + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \mu$$

例4.1.3

- 注意:不是所有的$r.v.$都有数学期望

例4.1.3

- 注意:不是所有的$r.v.$都有数学期望

例如: 柯西($Cauchy$)分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+\pi^2)},\quad -\infty<x<+\infty$$

但

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi(1+\pi^2)}dx$$

发散

它的数学期望不存在!

C. 一般情形

C. 一般情形：设ξ的分布函数为：$\mathbb{F}_\xi(x)$，则ξ的数学期望定义如下：

C. 一般情形：设ξ的分布函数为：$\mathbb{F}_{\xi}(x)$，则ξ的数学期望定义如下：

$$\mathbb{E}(\xi) =$$

C. 一般情形：设ξ的分布函数为：$\mathbb{F}_\xi(x)$，则ξ的数学期望定义如下：

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^1} x d\mathbb{F}_\xi(x).$$

C. 一般情形：设ξ的分布函数为：$\mathbb{F}_\xi(x)$，则ξ的数学期望定义如下:

$$\mathbb{E}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^1} x d\mathbb{F}_\xi(x).$$

这里积分$\int_{\mathbb{R}^1} x d\mathbb{F}_\xi(x)$ 为函数$f(x)=x$关于分布函数$\mathbb{F}_\xi(x)$的$Riemanm-Stieltjes$ 积分，定义如下:

C. 一般情形：设ξ的分布函数为：$\mathbb{F}_\xi(x)$，则ξ的数学期望定义如下：

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^1} xd\mathbb{F}_\xi(x).$$

这里积分$\int_{\mathbb{R}^1} xd\mathbb{F}_\xi(x)$ 为函数$f(x) = x$关于分布函数$\mathbb{F}_\xi(x)$的$Riemanm - Stieltjes$ 积分，定义如下：

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} xdF_\xi(x)\\ &\triangleq \lim_{\Delta\to 0}\sum_i x_i\left(F_\xi(x_{i+1}) - F_\xi(x_i)\right)\end{aligned}$$

C. 一般情形：设ξ的分布函数为：$\mathbb{F}_\xi(x)$，则ξ的数学期望定义如下：

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^1} x d\mathbb{F}_\xi(x).$$

这里积分$\int_{\mathbb{R}^1} x d\mathbb{F}_\xi(x)$ 为函数$f(x) = x$关于分布函数$\mathbb{F}_\xi(x)$的$Riemanm - Stieltjes$ 积分，定义如下：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) \triangleq \lim_{\Delta \to 0} \sum_i x_i \left(F_\xi(x_{i+1}) - F_\xi(x_i)\right)$$

一些常见分布的数学期望

几何分布：　设$\xi \sim G(p)$，则

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} p$$

$$=$$

一些常见分布的数学期望

几何分布： 设$\xi \sim G(p)$，则

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} p$$

$$= p \times \frac{d}{dx}(1-x)^{-1}\Big|_{x=1-p} =$$

一些常见分布的数学期望

几何分布： 设$\xi \sim G(p)$，则

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} p$$

$$= p \times \frac{d}{dx}(1-x)^{-1}\Big|_{x=1-p} = \frac{1}{p}$$

一些常见分布的数学期望

普阿松分布： 设$\xi \sim P(\lambda)$，则

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} i \times \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda$$

一些常见分布的数学期望

普阿松分布： 设$\xi \sim P(\lambda)$，则

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} i \times \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda$$

均匀分布： 设$\xi \sim U(a,b)$，则

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

一些常见分布的数学期望

Γ-分布：设$\xi \sim \Gamma(\lambda, r)$，则$\xi$的数学期望

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx \\
&=
\end{aligned}
$$

一些常见分布的数学期望

Γ-分布：设$\xi \sim \Gamma(\lambda, r)$，则$\xi$的数学期望

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{r}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{r+1}}{\Gamma(r+1)} x^{(r+1)-1} e^{-\lambda x} dx \\
&=
\end{aligned}$$

一些常见分布的数学期望

Γ-分布：设$\xi \sim \Gamma(\lambda, r)$，则$\xi$的数学期望

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{r}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{r+1}}{\Gamma(r+1)} x^{(r+1)-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{r}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

随机变量函数的数学期望

定理4.1.1: （i）设连续型（离散型）随机变量X的分布密度为$p(x)$（分布列为p_i, $i=1,2,\cdots$），实函数$g(x)$为Borel可测函数，令$Y=g(X)$，若$E(g(X))$存在，则

$$E(g(X)) =$$

随机变量函数的数学期望

定理4.1.1: （i）设连续型（离散型）随机变量X的分布密度为$p(x)$（分布列为p_i, $i=1,2,\cdots$），实函数$g(x)$为Borel可测函数，令$Y=g(X)$，若$E(g(X))$ 存在，则

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i, & X\text{为离散型随机变量;}\\ \int_{-\infty}^{\infty}g(x)p(x)dx, & X\text{为连续型随机变量。}\end{cases}$$

随机变量函数的数学期望

（ii）设连续型（离散型）随机向量$X = X_1, \cdots, X_n$的联合分布密度为$p(x_1, \cdots, x_n)$（分布列为$p_{i_1,\cdots,i_n}$, $i_j = 1, 2, \cdots$），实函数$g(x_1, \cdots, x_n)$为Borel可测函数，令$Y = g(X)$，若$E(g(X))$ 存在，则

（a）若X为离散型随机变量

$$E(g(X)) =$$

随机变量函数的数学期望

（ii）设连续型（离散型）随机向量$X=X_1,\cdots,X_n$的联合分布密度为$p(x_1,\cdots,x_n)$（分布列为$p_{i_1,\cdots,i_n}$, $i_j=1,2,\cdots$），实函数$g(x_1,\cdots,x_n)$为Borel可测函数，令$Y=g(X)$，若$E(g(X))$ 存在，则

（a）若X为离散型随机变量

$$E(g(X))=\sum_{i_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_n=1}^{\infty}g(x_1,\cdots,x_n)p_{i_1,\cdots,i_n}.$$

（b）若X为连续型随机变量

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}g(x_1,\cdots,x_n)p(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n.$$

例4.1.4

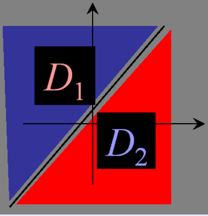
设$X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1), X, Y$ 相互独立，求$E(max(X,Y))$.

解 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$$E(\max\{X,Y\})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,y\}f(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{D_1}\max\{x,y\}f(x,y)dxdy$$

$$+\iint_{D_2}\max\{x,y\}f(x,y)dxdy$$



4.1.4(续)

$=$

4.1.4(续)

$$= \iint_{D_1} y \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy + \iint_{D_2} x \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

$=$

4.1.4(续)

$$= \iint_{D_1} y \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy + \iint_{D_2} x \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{x}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \int_{y}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$=$$

4.1.4(续)

$$= \iint_{D_1} y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy + \iint_{D_2} x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_x^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_y^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_x^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy =$$

4.1.4(续)

$$= \iint_{D_1} y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy + \iint_{D_2} x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{x}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{y}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{x}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$$

4.1.4(续)

$$= \iint_{D_1} y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy + \iint_{D_2} x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{x}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{y}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{x}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$= 4\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

例4.1.4(续)

$$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr$$

$$= 4 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \pi$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

一般地，若$X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, X, Y相互独立，则

$$E(max\{X, Y\}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$E(min\{X, Y\}) = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

数学期望的性质

- $E(C)=C$ 常数
- $E(aX)=aE(X)$
- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + C\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + C$$

- 当X,Y 独立时，$E(XY)=E(X)E(Y)$
  注：逆命题不成立，即若$E(XY)=E(X)E(Y)X,Y$ 不一定独立
- 若存在数a使$P(X\geq a)=1$，则$E(X)\geq a$；
  若存在数b 使$P(X\leq b)=1$，则$E(X)\leq b$.

数学期望的应用举例

例4.1.1: 分赌本问题:

甲乙两赌徒赌技相同，各出赌注50元.无平局，谁先赢3局，则获全部赌注.当甲赢2局、乙赢1局时，中止了赌博.问如何分赌本?

数学期望的应用举例

例4.1.1: 分赌本问题:

甲乙两赌徒赌技相同，各出赌注50元.无平局，谁先赢3局，则获全部赌注.当甲赢2局、乙赢1局时，中止了赌博.问如何分赌本?

1. 按已赌局数分:

则甲分总赌本的$2/3$、乙分总赌本的$1/3$

2. 按已赌局数和再赌下去的“期望”分:
因为再赌两局必分胜负，共四种情况：甲甲、甲乙、乙甲、乙乙所以甲分总赌本的3/4、乙分总赌本的1/4

2. 按已赌局数和再赌下去的“期望”分:

因为再赌两局必分胜负，共四种情况：甲甲、甲乙、乙甲、乙乙所以甲分总赌本的3/4、乙分总赌本的1/4

若按已赌局数和再赌下去的“期望”分，则甲的所得X是一个可能取值为0 或100的随机变量，其分布列为:

X	0	100
P	1/4	3/4

甲的“期望”所得是：$0 \times 1/4 + 100 \times 3/4 = 75.$

数学期望的应用举例(续)

例4.1.2: 概率群试 验血方案的选择

为普查某种疾病, n 个人需验血. 验血方案有如下两种:

数学期望的应用举例(续)

例4.1.2: 概率群试 验血方案的选择

为普查某种疾病, n 个人需验血. 验血方案有如下两种:

(1) 分别化验每个人的血, 共需化验n 次;

数学期望的应用举例(续)

例4.1.2: 概率群试 验血方案的选择

为普查某种疾病，n 个人需验血. 验血方案有如下两种:

(1) 分别化验每个人的血，共需化验n 次;

(2) 分组化验,k 个人的血混在一起化验，若结果为阴性，则只需化验一次; 若为阳性，则对k 个人的血逐个化验，找出有病者，此时k 个人的血需化验$k+1$ 次。设每人血液化验呈阳性的概率为p，且每人化验结果是相互独立的.试说明选择哪一方案较经济。

数学期望的应用举例(续)

解:只须计算方案（2）所需次数的期望，为简单起见，不妨记n是k的倍数，共分成n/k组.设第i组需化验的次数为X_i,

数学期望的应用举例(续)

解:只须计算方案（2）所需次数的期望，为简单起见，不妨记n是k的倍数，共分成n/k组.设第i组需化验的次数为X_i, 则

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ (1-p)^k & 1-(1-p)^k \end{pmatrix}$$

数学期望的应用举例(续)

解:只须计算方案（2）所需次数的期望，为简单起见，不妨记n是k的倍数，共分成n/k组.设第i组需化验的次数为X_i，则

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ (1-p)^k & 1-(1-p)^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E(X_i) &= (1-P)^k + (k+1)[1-(1-p)^k] \\ &= (k+1) - k(1-p)^k \end{aligned}$$

数学期望的应用举例(续)

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n/k}E(X_i)=\frac{n}{k}[(k+1)-k(1-p)^k]$$

$$=n\left[1-\left((1-p)^k-\frac{1}{k}\right)\right]$$

若$\left((1-p)^k-\frac{1}{k}\right)>0$,则$E(X)<n$

数学期望的应用举例(续)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n/k} E(X_i) = \frac{n}{k}[(k+1) - k(1-p)^k]$$

$$= n\left[1 - \left((1-p)^k - \frac{1}{k}\right)\right]$$

若$\left((1-p)^k - \frac{1}{k}\right) > 0$,则$E(X) < n$

例如,$n = 1000, p = 0.001, k = 10$,

$$E(X) = 1000\left[1 - \left(0.999^{10} - \frac{1}{10}\right)\right] \approx 110 << 1000.$$

当$(1-p)^k < 1/k$时, 选择方案(2) 较经济.

思考题:

有5000人的一个群体，其中一人患有某种致命性的疾病，可以同过验血来检验出此种疾病，试计算用概率群试法需检验几次？问有无其他更好的方法?

数学期望的应用举例(续)

例4.1.3: 报童问题 设某报童每日的潜在卖报数ς服从参数为的泊松分布。如果每卖出一份报纸可得报酬a元，卖不掉而退回则每份赔偿b元。若某日该报童批进n份报纸，试求其期望所得，并求出最佳的n。

数学期望的应用举例(续)

例4.1.4: 市场上对某种产品每年需求量为X吨，$X \sim U[2000, 4000]$, 每出售一吨可赚3万元,售不出去，则每吨需仓库保管费1 万元，问应该生产这中商品多少吨, 才能使平均利润最大?

解:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2000}, & 2000 < x < 4000 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

数学期望的应用举例(续)

例4.1.4: 市场上对某种产品每年需求量为X 吨，$X \sim U[2000, 4000]$, 每出售一吨可赚3万元,售不出去，则每吨需仓库保管费1 万元，问应该生产这中商品多少吨, 才能使平均利润最大?

解:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2000}, & 2000 < x < 4000 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

设每年生产y 吨的利润为Y,显然，$2000 < y < 4000$

$$Y = g(X) = \begin{cases} 3y, & y \le X \\ 3X - (y - X), & y > X \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3y, & y \le x \\ 4x - y, & y > x \end{cases}$$

数学期望的应用举例(续)

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$= \int_{2000}^{y} (4x - y)\frac{1}{2000}dx + \int_{y}^{4000} 3y\frac{1}{2000}dx$$

$$= \frac{1}{2000}(-2y^2 + 14000y - 8 \times 10^6)$$

$$\frac{dE(Y)}{dy} = \frac{1}{2000}(-4y + 14000) = 0$$

显然，$\frac{d^2E(Y)}{dy^2} = -\frac{4}{2000} < 0$

故$y = 3500$时，$E(Y)$最大，$E(Y) = 8250$万元

方差定义

方差定义

若$E(X-E(X))^2$存在，则称$E(X-E(X))^2$为X 的方差，记为

$$Var(X)=D(X)=E(X-E(X))^2$$

称$\sigma_X=\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$为X 的标准差.

标准差的量纲与随机变量的量纲相同。

概率意义:

方差定义

若$E(X-E(X))^2$存在，则称$E(X-E(X))^2$为X 的方差，记为

$$Var(X)=D(X)=E(X-E(X))^2$$

称$\sigma_X=\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$为X 的标准差.

标准差的量纲与随机变量的量纲相同。

概率意义:

数学期望反映了X 取值的中心.

方差反映了X 取值相对于其取值中心的离散程度.

方差的计算

命题:

$$Var(X) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P(X = E(X)) = 1$$

若X 为离散型随机变量，分布列为

$$P(X = k) = p_k, \;\; k = 1, 2. \dots$$

方差的计算

命题:

$$Var(X)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad P(X=E(X))=1$$

若X 为离散型随机变量，分布列为

$$P(X=k)=p_k,\quad k=1,2.\dots$$

$$D(X)=\sum_{k}^{+\infty}(x_k-E(X))^2p_k$$

若X 为连续型随机变量，概率密度为$f(x)$

方差的计算

命题:

$$Var(X)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad P(X=E(X))=1$$

若X 为离散型随机变量，分布列为

$$P(X=k)=p_k,\quad k=1,2.\ldots$$

$$D(X)=\sum_k^{+\infty}(x_k-E(X))^2p_k$$

若X 为连续型随机变量，概率密度为$f(x)$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2f(x)dx$$

计算方差的常用公式:

方差的计算

命题:

$$Var(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$$

若X 为离散型随机变量，分布列为

$$P(X = k) = p_k, \quad k = 1, 2. \ldots$$

$$D(X) = \sum_{k}^{+\infty} (x_k - E(X))^2 p_k$$

若X 为连续型随机变量，概率密度为$f(x)$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

计算方差的常用公式:

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

例4.2.1

设$X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$.

例4.2.1

设$X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$.
解:

$$EX =$$

例4.2.1

设$X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$.
解:

$$EX = \lambda$$

$$E(X^2) =$$

例4.2.1

设$X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$.
解:

$$EX = \lambda$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

所以,

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

$$D(X) =$$

例4.2.1

设$X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$.
解:

$$EX = \lambda$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

所以,

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda$$

例4.2.2

设$X \sim B(n,p)$，求$D(X)$.

解：$D(X) = np(1-p)$

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$D(X)$

解:

$$D(X) =$$

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $D(X)$

解:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$D(X)$

解:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{\frac{x-\mu}{\sigma}=t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$=$$

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$D(X)$

解:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{\frac{x-\mu}{\sigma}=t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \sigma^2$$

例4.2.3

设X表示独立射击直到击中目标为止所需射击的次数，已知每次射击中靶的概率为p，求$E(X), D(X)$

解：X服从

例4.2.3

设X表示独立射击直到击中目标为止所需射击的次数, 已知每次射击中靶的概率为p, 求$E(X), D(X)$

解: X服从几何分布.

$$P(X=k)=$$

例4.2.3

设X表示独立射击直到击中目标为止所需射击的次数, 已知每次射击中靶的概率为p，求$E(X), D(X)$

解: X服从几何分布.

$$P(X=k)=pq^{k-1},\quad k=1,2,\ldots$$

$$p+q=1 \qquad 0<p<1$$

$$E(X)=$$

例4.2.3

设X表示独立射击直到击中目标为止所需射击的次数, 已知每次射击中靶的概率为p , 求$E(X), D(X)$

解: X服从几何分布.

$$P(X=k)=pq^{k-1},\ \ k=1,2,\ldots$$

$$p+q=1 \qquad 0<p<1$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}kpq^{k-1}=$$

例4.2.3

设X表示独立射击直到击中目标为止所需射击的次数, 已知每次射击中靶的概率为p , 求$E(X), D(X)$

解: X服从几何分布.

$$P(X=k)=pq^{k-1}, \quad k=1,2,\ldots$$

$$p+q=1 \qquad 0<p<1$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}=$$

例4.2.3

设X表示独立射击直到击中目标为止所需射击的次数, 已知每次射击中靶的概率为p，求$E(X), D(X)$

解: X服从几何分布.

$$P(X=k)=pq^{k-1},\quad k=1,2,\ldots$$

$$p+q=1 \qquad 0<p<1$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

例4.2.3

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)pq^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}$$

例4.2.3

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)pq^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} \\
&= pq\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{1}{p} \\
&=
\end{aligned}
$$

例4.2.3

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)pq^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}$$

$$= pq \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{1}{p}$$

$$= pq \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) |_{x=q} + \frac{1}{p}$$

$$=$$

例4.2.3

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)pq^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}$$

$$= pq\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{1}{p}$$

$$= pq\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)|_{x=q} + \frac{1}{p}$$

$$= pq\frac{2}{(1-x)^3}|_{x=q} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$D(X) =$$

例4.2.3

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)pq^{k-1}+\sum_{k=1}^{+\infty}kpq^{k-1}$$

$$=pq\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)q^{k-2}+\frac{1}{p}$$

$$=pq\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\right)|_{x=q}+\frac{1}{p}$$

$$=pq\frac{2}{(1-x)^3}|_{x=q}+\frac{1}{p}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$D(X)=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

方差的性质

方差的性质

- $D(aX+b) = a^2 D(X)$

方差的性质

- $D(aX+b)=a^2D(X)$
- 若X,Y相互独立，则

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

方差的性质

- $D(aX+b)=a^2D(X)$
- 若X,Y相互独立，则

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

- $X_1,\ldots,X_n$相互独立,$a_1,a_2,\ldots,a_n,b$为常数

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2D(X_i)$$

方差的性质

方差的性质

- 若X, Y 相互独立$\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$
  $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

方差的性质

- 若X, Y 相互独立$\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$
  $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$
- 对任意常数$C, D(X) \leq E(X-C)^2$, 当且仅当$C = E(X)$时等号成立.

切比雪夫不等式

设随机变量X的方差存在(这时均值也存在), 则对任意正数ε, 有下面不等式成立

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

标准化随机变量

标准化随机变量

设随机变量X的期望$E(X)$、方差$D(X)$ 都存在，且$D(X) \neq 0$，则称

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为X的标准化随机变量. 显然，

标准化随机变量

设随机变量X的期望$E(X)$、方差$D(X)$ 都存在，且$D(X) \neq 0$，则称

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为X的标准化随机变量．显然，

$$E(X^*) = 0,\ \ D(X^*) = 1$$

（1）标准化随机变量消除了各个总体之间的均值、方差和度量单位的差异;

标准化随机变量

设随机变量X的期望$E(X)$、方差$D(X)$ 都存在，且$D(X) \neq 0$，则称

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为X的标准化随机变量. 显然，

$$E(X^*) = 0, \ \ D(X^*) = 1$$

（1）标准化随机变量消除了各个总体之间的均值、方差和度量单位的差异;
（2）在实际应用中，为比较具有同分布的各种不同来源数据的概率特征，常把数据标准化。

标准化随机变量

设随机变量X的期望$E(X)$、方差$D(X)$ 都存在，且$D(X)\neq 0$，则称

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为X的标准化随机变量. 显然，

$$E(X^*) = 0,\ \ D(X^*) = 1$$

（1）标准化随机变量消除了各个总体之间的均值、方差和度量单位的差异;
（2）在实际应用中，为比较具有同分布的各种不同来源数据的概率特征，常把数据标准化。例如，在比较一名同学在班级的两次不同考试中的学习成绩，用他的标准分数更合理;

标准化随机变量

设随机变量X的期望$E(X)$、方差$D(X)$ 都存在，且$D(X) \neq 0$，则称

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为X的标准化随机变量．显然，

$$E(X^*) = 0, \ \ D(X^*) = 1$$

（1）标准化随机变量消除了各个总体之间的均值、方差和度量单位的差异;

（2）在实际应用中，为比较具有同分布的各种不同来源数据的概率特征，常把数据标准化。例如，在比较一名同学在班级的两次不同考试中的学习成绩，用他的标准分数更合理; 在比较在不同班级的两名同学的学习成绩时，用各自班的标准分数来比较的合理性就要差一些，除非两个班级有相同的学习水平。

随机变量的其它数字特征

矩、变异系数、分位数、中位数

k阶原点矩:

随机变量的其它数字特征

矩、变异系数、分位数、中位数

k阶原点矩: $\mu_k = E(X^k) \quad k = 1, 2, \ldots.$

- 注意: $\mu_1 = E(X)$.

k 阶中心矩:

随机变量的其它数字特征

矩、变异系数、分位数、中位数

k阶原点矩: $\mu_k = E(X^k) \quad k = 1, 2, \ldots.$

- 注意: $\mu_1 = E(X)$.

k 阶中心矩: $v_k = E[X - E(X)]^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$

- 注意: $v_2 = Var(X)$

k 阶原点矩与k 阶中心矩的关系:

随机变量的其它数字特征

变异系数

随机变量的其它数字特征

变异系数

称$C_V = \dfrac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$为$X$ 的变异系数.

分位数

随机变量的其它数字特征

变异系数

称$C_V = \dfrac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$为$X$ 的变异系数.

分位数

设$0 < p < 1$，$x_p = F^{-1}(p)$,

$$F^{-1}(p) = inf\{x : F(x) \geq p\}$$

则称x_p 为此分布$p-$分位数，亦称x_p 为下侧$p-$分位数.

中位数

随机变量的其它数字特征

变异系数

称$C_V = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$为$X$ 的变异系数.

分位数

设$0 < p < 1$，$x_p = F^{-1}(p)$,

$$F^{-1}(p) = inf\{x : F(x) \geq p\}$$

则称x_p 为此分布p–分位数，亦称x_p 为下侧p–分位数.

中位数

称$p = 0.5$时的p分位数x为中位数.

中位数与均值

随机变量的其它数字特征

变异系数

称$C_V = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$为$X$ 的变异系数.

分位数

设$0 < p < 1$，$x_p = F^{-1}(p)$,

$$F^{-1}(p) = inf\{x : F(x) \geq p\}$$

则称x_p 为此分布p–分位数，亦称x_p 为下侧p–分位数.

中位数

称$p = 0.5$时的p分位数x为中位数.

中位数与均值

- 相同点：都是反映随机变量的位置特征.
- 不同点：含义不同，中位数较均值稳定。

随机向量的协方差与相关系数

随机向量的协方差与相关系数

称

$$Cov(X,Y) = E[X - E(X)][Y - E(Y)]$$

为X 与Y的协方差.

称

$$\begin{pmatrix} D(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}$$

为X,Y的

随机向量的协方差与相关系数

称

$$Cov(X,Y) = E[X - E(X)][Y - E(Y)]$$

为X 与Y的协方差.

称

$$\begin{pmatrix} D(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}$$

为X,Y的协方差矩阵

随机向量的协方差与相关系数

随机向量的协方差与相关系数

称

$$r_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

为X 与Y 的相关系数.

随机向量的协方差与相关系数

称

$$r_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

为X 与Y 的相关系数.

若记

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \quad Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$$

则

$$r_{XY} = cov(X^*, Y^*)$$

协方差和相关系数的计算

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

若(X, Y) 为离散型，

协方差和相关系数的计算

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

若(X,Y) 为离散型，

$$cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}[x_i - E(X)][y_j - E(Y)]p_{ij}$$

协方差和相关系数的计算

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

若(X,Y) 为离散型，

$$cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}[x_i - E(X)][y_j - E(Y)]p_{ij}$$

若(X ,Y) 为连续型，

协方差和相关系数的计算

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

若(X,Y) 为离散型，

$$cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}[x_i - E(X)][y_j - E(Y)]p_{ij}$$

若(X ,Y) 为连续型，

$$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x - E(X)][y - E(Y)]f(x,y)dxdy$$

例4.2.4

设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;r)$,

例4.2.4

设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;r)$，求(1)$(X,Y)$的协方差矩阵;

例4.2.4

设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;r)$，求(1)$(X,Y)$的协方差矩阵；(2)$(X,Y)$相关系数$r_{XY}$

解

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X,Y)\\
&=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\,p(x,y)\,dxdy\\
&=
\end{aligned}
$$

例4.2.4

设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;r)$，求(1)$(X,Y)$的协方差矩阵；(2)$(X,Y)$相关系数$r_{XY}$

解

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X,Y)\\
&=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\,p(x,y)\,dxdy\\
&=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{uv\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{u^2-2ruv+v^2}{2(1-r^2)}\right\}dudv\\
&=
\end{aligned}
$$

例4.2.4

设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;r)$，求(1)$(X,Y)$的协方差矩阵；(2)$(X,Y)$相关系数$r_{XY}$

解

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X,Y)\\
&=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\,p(x,y)\,dxdy\\
&=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{uv\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{u^2-2ruv+v^2}{2(1-r^2)}\right\}dudv\\
&=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{uv\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{(u-rv)^2}{2(1-r^2)}-\frac{v^2}{2}\right\}dudv\\
&=
\end{aligned}
$$

例4.2.4

设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;r)$，求(1)$(X,Y)$的协方差矩阵；(2)$(X,Y)$相关系数$r_{XY}$

解

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X,Y)\\
&=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\,p(x,y)\,dxdy\\
&=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{uv\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{u^2-2ruv+v^2}{2(1-r^2)}\right\}dudv\\
&=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{uv\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{(u-rv)^2}{2(1-r^2)}-\frac{v^2}{2}\right\}dudv\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rv^2\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}dv=r\sigma_1\sigma_2
\end{aligned}$$

例4.2.4

所以，

$$\mathrm{Var}\,(X, Y) =$$

例4.2.4

所以，

$$\mathrm{Var}\,(X,Y)=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

$$r_{XY}=$$

例4.2.4

所以，

$$\mathrm{Var}\,(X,Y)=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

$$r_{XY}=r$$

从而，若$(X,Y)\ \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2;r)$
则X,Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ X ,Y 不相关

协方差和相关系数的性质

协方差具有如下的性质:

(1)对称性: $\mathsf{Cov}(X,Y)=\mathsf{Cov}(Y,X)$;

(2)

协方差和相关系数的性质

协方差具有如下的性质：

(1)对称性： $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$;

(2) 若X与Y相互独立，则$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$;

(3)

协方差和相关系数的性质

协方差具有如下的性质：

(1)对称性：$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$;

(2) 若X与Y相互独立，则$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$;

(3) 对于任何实数c，$\mathrm{Cov}(cX,Y)=\mathrm{Cov}(X,cY)=c\mathrm{Cov}(X,Y)$

(4)

协方差和相关系数的性质

协方差具有如下的性质:

(1)对称性: $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$;

(2) 若X与Y相互独立, 则$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$;

(3) 对于任何实数c, $\mathrm{Cov}(cX,Y)=\mathrm{Cov}(X,cY)=c\mathrm{Cov}(X,Y)$

(4)$D(\xi_i)=\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_i)$。

(5)

$$cov\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i,\sum_{j=1}^{n}b_jY_j\right)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_jcov(X_i,Y_j)$$

协方差和相关系数的性质

(6)

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} cov(X_i, Y_j)$$

若$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

例4.2.5

设X表示独立射击直到击中目标n次为止所需射击的次数，已知每次射击中靶的概率为p，求$E(X), D(X)$.

例4.2.5

设X表示独立射击直到击中目标n次为止所需射击的次数，已知每次射击中靶的概率为p，求$E(X), D(X)$.

解:令

例4.2.5

设X表示独立射击直到击中目标n次为止所需射击的次数, 已知每次射击中靶的概率为p, 求$E(X), D(X)$.

解:令X_i表示击中目标$i-1$次后到第i 次击中目标所需射击的次数, $i=1,2,\ldots,n$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立, 且$X=$

例4.2.5

设X表示独立射击直到击中目标n次为止所需射击的次数，已知每次射击中靶的概率为p，求$E(X), D(X)$.

解:令X_i表示击中目标$i-1$次后到第i次击中目标所需射击的次数，$i=1,2,\ldots,n$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，且$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$
由前面的例知:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=\frac{n}{p}$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)=\frac{n(1-p)}{p^2}$$

例4.2.6

将编号分别为$1\sim n$的n 个球随机地放入编号分别为$1\sim n$的n只盒子中，每盒一球．若球的号码与盒子的号码一致，则称为一个配对．求配对个数X 的期望与方差．

例4.2.6

将编号分别为$1\sim n$的n 个球随机地放入编号分别为$1\sim n$的n只盒子中，每盒一球. 若球的号码与盒子的号码一致，则称为一个配对. 求配对个数X 的期望与方差.

解:记X_i为1，如果i号放入i号盒,否则为0. $i=1,2,\ldots,n$则

$$X=$$

例4.2.6

将编号分别为$1\sim n$的n 个球随机地放入编号分别为$1\sim n$的n只盒子中，每盒一球．若球的号码与盒子的号码一致，则称为一个配对．求配对个数X 的期望与方差．

解:记X_i为1，如果i号放入i号盒,否则为0．$i=1,2,\ldots,n$则

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

但

例4.2.6

将编号分别为$1\sim n$的n 个球随机地放入编号分别为$1\sim n$的n只盒子中，每盒一球. 若球的号码与盒子的号码一致，则称为一个配对. 求配对个数X 的期望与方差.

解:记X_i为1，如果i号放入i号盒,否则为0. $i=1,2,\ldots,n$则

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

但$X_1,X_2,\ldots,X_n$不相互独立，

$$E(X)=$$

例4.2.6

将编号分别为$1\sim n$的n 个球随机地放入编号分别为$1\sim n$的n只盒子中，每盒一球. 若球的号码与盒子的号码一致，则称为一个配对. 求配对个数X 的期望与方差.

解:记X_i为1，如果i号放入i号盒,否则为0. $i=1,2,\ldots,n$则

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

但$X_1,X_2,\ldots,X_n$不相互独立，

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\frac{1}{n}=1$$

例4.2.6(续)

注意到:

$$E(X_i^2) = \frac{1}{n} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$E(X_iX_j) = \frac{1}{n(n-1)} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$D(X) =$$

例4.2.6(续)

注意到:

$$E(X_i^2) = \frac{1}{n} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$E(X_i X_j) = \frac{1}{n(n-1)} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} cov(X_i, Y_j)$$

$$=$$

例4.2.6(续)

注意到:

$$E(X_i^2) = \frac{1}{n} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$E(X_iX_j) = \frac{1}{n(n-1)} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} cov(X_i, Y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n}) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} [\frac{1}{n(n-1)} - (\frac{1}{n})^2]$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + 2C_n^2 \frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$= 1$$

Cauchy-Schwarz不等式

$$| cov(X,Y) |^2 \leq D(X)D(Y)$$

当$D(X)>0, D(Y)>0$ 时，当且仅
当$P\{Y-E(Y)=t_0[X-E(X)]\}=1$时，等式成立。

Cauchy-Schwarz不等式

$$| cov(X,Y) |^2 \leq D(X)D(Y)$$

当$D(X)>0, D(Y)>0$ 时，当且仅
当$P\{Y-E(Y)=t_0[X-E(X)]\}=1$时，等式成立。
证：不妨设$D(X)>0$，令

$$g(t)=$$

Cauchy-Schwarz不等式

$$| cov(X,Y) |^2 \leq D(X)D(Y)$$

当$D(X) > 0, D(Y) > 0$ 时，当且仅当$P\{Y - E(Y) = t_0[X - E(X)]\} = 1$时，等式成立。

证：不妨设$D(X) > 0$，令

$$g(t) = E\{[Y - E(Y)] - t[X - E(X)]\}^2$$

$$=$$

Cauchy-Schwarz不等式

$$| \, cov(X,Y) \, |^2 \leq D(X)D(Y)$$

当$D(X) > 0, D(Y) > 0$ 时，当且仅当$P\{Y - E(Y) = t_0[X - E(X)]\} = 1$时，等式成立。
证：不妨设$D(X) > 0$，令

$$g(t) = E\{[Y - E(Y)] - t[X - E(X)]\}^2$$

$$= D(Y) - 2t\,cov(X,Y) + t^2 D(X)$$

对任何实数t,$g(t) \geq 0 \Rightarrow$

$$4cov^2(X,Y) - 4D(X)D(Y) \leq 0$$

即$| \, cov(X,Y) \, |^2 \leq D(X)D(Y)$等号成立 $\Longleftrightarrow$ $g(t) = 0$有两个相等的实零点

Cauchy-Schwarz不等式

$g(t_0) = 0$ 即 $E\{[Y - E(Y)] - t_0[X - E(X)]\}^2 = 0$

Cauchy-Schwarz不等式

$$g(t_0)=0 \text{ 即} E\{[Y-E(Y)]-t_0[X-E(X)]\}^2=0$$

$$\iff D[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))]=0$$

Cauchy-Schwarz不等式

$g(t_0) = 0$ 即 $E\{[Y - E(Y)] - t_0[X - E(X)]\}^2 = 0$

$$\iff D[(Y - E(Y)) - t_0(X - E(X))] = 0$$

$$\iff P[(Y - E(Y)) - t_0(X - E(X)) = 0] = 1$$

Cauchy-Schwarz不等式

$g(t_0) = 0$ 即 $E\{[Y - E(Y)] - t_0[X - E(X)]\}^2 = 0$

$$\iff D[(Y - E(Y)) - t_0(X - E(X))] = 0$$

$$\iff P[(Y - E(Y)) - t_0(X - E(X)) = 0] = 1$$

即 $P[(Y - E(Y)) = t_0(X - E(X))] = 1$
即 Y 与 X 有线性关系的概率等于1, 这种线性关系为

Cauchy-Schwarz不等式

$g(t_0)=0$ 即$E\{[Y-E(Y)]-t_0[X-E(X)]\}^2=0$

$$\iff D[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))]=0$$

$$\iff P[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))=0]=1$$

即$P[(Y-E(Y))=t_0(X-E(X))]=1$
即Y 与X有线性关系的概率等于1, 这种线性关系为

$$P\left(\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}=\pm\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)=1$$

相关系数的性质

$$|r_{XY}| \leq 1, |r_{XY}| = 1$$

相关系数的性质

$|r_{XY}| \leq 1$,$|r_{XY}| = 1 \iff Cauchy - Schwarz$不等式的等号成立

相关系数的性质

$|r_{XY}| \leq 1$, $|r_{XY}| = 1 \iff Cauchy - Schwarz$不等式的等号成立

$\iff$ 即Y 与X有线性关系的概率等于1，这种线性关系为

$$P\left(Y^* = \pm X^*\right) = 1$$

$X^* = (X - EX)/\sqrt{D(X)}$, $Y^* = (Y - EY)/\sqrt{D(Y)}$.

相关系数的性质

$$r_{XY} = 1 \iff cov(X,Y) > 0$$

$$p\left(Y^* = X^*\right) = 1$$

$$r_{XY} = -1 \iff cov(X,Y) < 0$$

$$p\left(Y^* = -X^*\right) = 1$$

相关系数的性质

$$r_{XY} = 1 \iff cov(X,Y) > 0$$

$$p\left(Y^* = X^*\right) = 1$$

$$r_{XY} = -1 \iff cov(X,Y) < 0$$

$$p\left(Y^* = -X^*\right) = 1$$

r_{XY}的大小反映了X与Y之间的线性关系

相关系数的性质

$$r_{XY} = 1 \iff cov(X,Y) > 0$$

$$p\left(Y^* = X^*\right) = 1$$

$$r_{XY} = -1 \iff cov(X,Y) < 0$$

$$p\left(Y^* = -X^*\right) = 1$$

r_{XY}的大小反映了X与Y之间的线性关系

- $0 < r_{XY} < 1$, X 与Y 间正相关.

相关系数的性质

$$r_{XY} = 1 \iff cov(X, Y) > 0$$

$$p\left(Y^* = X^*\right) = 1$$

$$r_{XY} = -1 \iff cov(X, Y) < 0$$

$$p\left(Y^* = -X^*\right) = 1$$

r_{XY}的大小反映了X与Y之间的线性关系

- $0 < r_{XY} < 1$, X 与Y 间正相关.
- $0 > r_{XY} > -1$, X 与Y 间负相关.

相关系数的性质

$$r_{XY} = 1 \iff cov(X,Y) > 0$$

$$p\left(Y^* = X^*\right) = 1$$

$$r_{XY} = -1 \iff cov(X,Y) < 0$$

$$p\left(Y^* = -X^*\right) = 1$$

r_{XY}的大小反映了X与Y之间的线性关系

- $0 < r_{XY} < 1$, X 与Y 间正相关.
- $0 > r_{XY} > -1$, X 与Y 间负相关.
- $0 > r_{XY} = \pm 1$, X 与Y 间以概率1存在线性关系.

相关系数的性质

$$r_{XY}=1 \iff cov(X,Y)>0$$

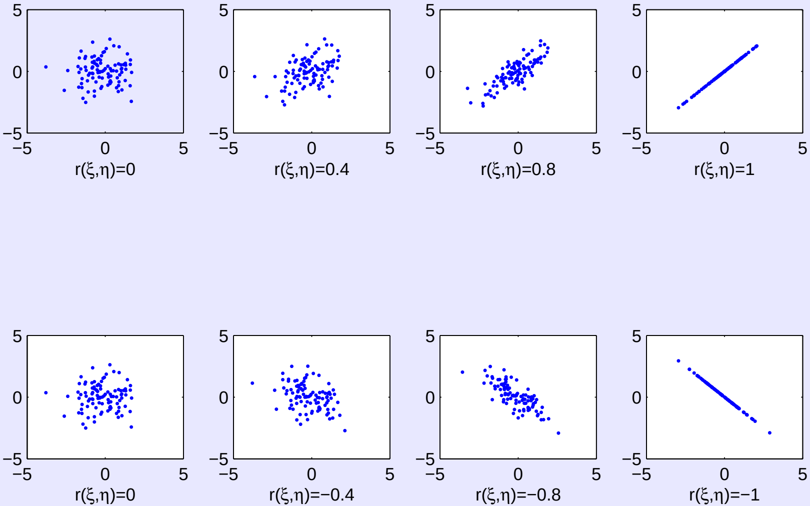
$$p\left(Y^*=X^*\right)=1$$

$$r_{XY}=-1 \iff cov(X,Y)<0$$

$$p\left(Y^*=-X^*\right)=1$$

r_{XY}的大小反映了X与Y之间的线性关系

- $0<r_{XY}<1$, X 与Y 间正相关.
- $0>r_{XY}>-1$, X 与Y 间负相关.
- $0>r_{XY}=\pm1$, X 与Y 间以概率1存在线性关系.
- $r_{XY}=0$, X 与Y 间不相关,没有线性关系



不同相关系数示意图

例

设$\theta \sim U(0,2\pi)$,$X=\cos\theta$,$Y=\cos(\theta+\alpha)$, α是给定的常数,
求r_{XY}

例

设$\theta \sim U(0,2\pi)$,$X=\cos\theta$,$Y=\cos(\theta+\alpha)$, α是给定的常数，求r_{XY}

解:

$$f_\theta(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & 0<t<2\pi\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$E(X)=$$

例

设$\theta \sim U(0,2\pi)$,$X=\cos\theta$,$Y=\cos(\theta+\alpha)$, α是给定的常数,求r_{XY}

解:

$$f_\theta(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & 0<t<2\pi\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\cos t\frac{1}{2\pi}dt=0$$

$$E(Y)=$$

例

设$\theta \sim U(0,2\pi)$,$X=\cos\theta$,$Y=\cos(\theta+\alpha)$, α是给定的常数，求r_{XY}

解:

$$f_\theta(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & 0<t<2\pi\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\cos t\frac{1}{2\pi}dt=0$$

$$E(Y)=\int_0^{2\pi}\cos(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt=0$$

例4.2.7

$$E(XY) =$$

例4.2.7

$$E(XY) = \int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt =$$

例4.2.7

$$E(XY) = \int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \quad cov(X,Y) =$$

例4.2.7

$$E(XY) = \int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \quad cov(X,Y) = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$E(X^2) =$$

例4.2.7

$$E(XY) = \int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \quad cov(X,Y) = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$E(X^2) = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}, D(X) =$$

例4.2.7

$$E(XY) = \int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \quad cov(X,Y) = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$E(X^2) = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}, D(X) = \frac{1}{2}$$

$$E(Y^2) =$$

例4.2.7

$$E(XY) = \int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$\iff cov(X,Y) = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$E(X^2) = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}, D(X) = \frac{1}{2}$$

$$E(Y^2) = \int_0^{2\pi} \cos^2(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}, D(Y) =$$

例4.2.7

$$E(XY) = \int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \quad cov(X,Y) = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$E(X^2) = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}, D(X) = \frac{1}{2}$$

$$E(Y^2) = \int_0^{2\pi} \cos^2(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}, D(Y) = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad r_{XY} = \cos\alpha$$

例4.2.7

若$\alpha = 0$, $r_{XY} =$

例4.2.7

若$\alpha = 0$, $r_{XY} = 1 \Rightarrow Y = X$
若$\alpha = \pi$,$r_{XY} =$

例4.2.7

若$\alpha = 0$, $r_{XY} = 1 \Rightarrow Y = X$
若$\alpha = \pi$,$r_{XY} = -1 \Rightarrow Y = -X$
从而有

$$|r_{XY}| = 1 \Rightarrow$$

X, Y有线性关系
若$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$,$r_{XY} = 0$ X, Y不相关，但X, Y不独立，

例4.2.7

若$\alpha = 0$, $r_{XY} = 1 \Rightarrow Y = X$
若$\alpha = \pi$,$r_{XY} = -1 \Rightarrow Y = -X$
从而有

$$|\, r_{XY} \,| = 1 \Rightarrow$$

X, Y有线性关系
若$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$,$r_{XY} = 0$ X, Y不相关，但X, Y不独立，
X, Y没有线性关系，但有函数关系

例4.2.7

若$\alpha = 0$, $r_{XY} = 1 \Rightarrow Y = X$
若$\alpha = \pi$,$r_{XY} = -1 \Rightarrow Y = -X$
从而有

$$\mid r_{XY} \mid = 1 \Rightarrow$$

X, Y有线性关系
若$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$,$r_{XY} = 0$ X, Y不相关，但X, Y不独立，
X, Y没有线性关系，但有函数关系

$$X^2 + Y^2 = 1$$

独立与不相关

$$r_{XY} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X, Y \text{ 不相关}$$

独立与不相关

$$
\begin{aligned}
r_{XY}=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad X,Y \text{ 不相关} \\
&\Longleftrightarrow \quad cov(X,Y)=0
\end{aligned}
$$

独立与不相关

$$
\begin{aligned}
r_{XY} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad X, Y \text{ 不相关} \\
&\Longleftrightarrow \quad cov(X, Y) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad E(XY) = E(X)E(Y)
\end{aligned}
$$

独立与不相关

$$
\begin{aligned}
r_{XY} = 0 \iff & X, Y \text{ 不相关} \\
\iff & cov(X, Y) = 0 \\
\iff & E(XY) = E(X)E(Y) \\
\iff & D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)
\end{aligned}
$$

独立与不相关

$$
\begin{aligned}
r_{XY}=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad X,Y \text{ 不相关} \\
&\Longleftrightarrow \quad cov(X,Y)=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad E(XY)=E(X)E(Y) \\
&\Longleftrightarrow \quad D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)
\end{aligned}
$$

$$X,Y \text{ 相互独立} \quad \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad X,Y \text{ 不相关}$$

两种例外情形:

（i）若(X,Y)服从二维正态分布,

$$X,Y \text{ 相互独立} \quad \Longleftrightarrow \quad X,Y \text{ 不相关}$$

（ii）设ξ,η都是只有两个可能值的随机变量。试证若ξ与η不相关，则ξ与η独立。
不妨设

$$\mathbb{P}(\xi = x_0) + \mathbb{P}(\xi = x_1) = 1, \quad x_0 < x_1$$

（ii）设ξ,η都是只有两个可能值的随机变量。试证若ξ与η不相关，则ξ与η独立。
不妨设

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi = x_0) + \mathbb{P}(\xi = x_1) = & \ 1, \quad x_0 < x_1 \\ \mathbb{P}(\eta = y_0) + \mathbb{P}(\eta = y_1) = & \ 1, \quad y_0 < y_1 \end{aligned}$$

（ii）设ξ,η都是只有两个可能值的随机变量。试证若ξ与η不相关，则ξ与η独立。
不妨设

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi = x_0) + \mathbb{P}(\xi = x_1) = & \quad 1, \quad x_0 < x_1 \\
\mathbb{P}(\eta = y_0) + \mathbb{P}(\eta = y_1) = & \quad 1, \quad y_0 < y_1
\end{aligned}
$$

令

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - x_0}{x_1 - x_0},$$

令

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta - y_0}{y_1 - y_0}$$

令

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta - y_0}{y_1 - y_0}$$

则$\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$都是取值于0和1的随机变量，现只需证明它们相互独立。

令

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta - y_0}{y_1 - y_0}$$

则$\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$都是取值于0和1的随机变量，现只需证明它们相互独立。由ξ和η不相关知$\tilde{\xi}$和$\tilde{\eta}$不相关，

令

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta - y_0}{y_1 - y_0}$$

则$\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$都是取值于0和1的随机变量，现只需证明它们相互独立。由ξ和η不相关知$\tilde{\xi}$和$\tilde{\eta}$不相关，即

$$\mathbb{E}(\tilde{\xi}\tilde{\eta}) = \mathbb{E}(\tilde{\xi}) \cdot \mathbb{E}(\tilde{\eta})$$

亦即

$$\mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1, \tilde{\eta} = 1) = \mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1) \cdot \mathbb{P}(\tilde{\eta} = 1)$$

令

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta - y_0}{y_1 - y_0}$$

则$\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$都是取值于0和1的随机变量，现只需证明它们相互独立。由ξ和η不相关知$\tilde{\xi}$和$\tilde{\eta}$不相关，即

$$\mathbb{E}(\tilde{\xi}\tilde{\eta}) = \mathbb{E}(\tilde{\xi}) \cdot \mathbb{E}(\tilde{\eta})$$

亦即

$$\mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1, \tilde{\eta} = 1) = \mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1) \cdot \mathbb{P}(\tilde{\eta} = 1)$$

从而

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\tilde{\xi} = 0, \tilde{\eta} = 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\tilde{\eta} = 1\right) - \mathbb{P}\left(\tilde{\xi} = 1, \tilde{\eta} = 1\right) \\ &= \end{aligned}$$

令

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta - y_0}{y_1 - y_0}$$

则$\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$都是取值于0和1的随机变量，现只需证明它们相互独立。由ξ和η不相关知$\tilde{\xi}$和$\tilde{\eta}$不相关，即

$$\mathbb{E}(\tilde{\xi}\tilde{\eta}) = \mathbb{E}(\tilde{\xi}) \cdot \mathbb{E}(\tilde{\eta})$$

亦即

$$\mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1, \tilde{\eta} = 1) = \mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1) \cdot \mathbb{P}(\tilde{\eta} = 1)$$

从而

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\tilde{\xi} = 0, \tilde{\eta} = 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\tilde{\eta} = 1\right) - \mathbb{P}\left(\tilde{\xi} = 1, \tilde{\eta} = 1\right) \\
&= \mathbb{P}(\tilde{\eta} = 1)\left(1 - \mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1)\right) \\
&=
\end{aligned}$$

令

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta - y_0}{y_1 - y_0}$$

则$\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$都是取值于0和1的随机变量，现只需证明它们相互独立。由ξ和η不相关知$\tilde{\xi}$和$\tilde{\eta}$不相关，即

$$\mathbb{E}(\tilde{\xi}\tilde{\eta}) = \mathbb{E}(\tilde{\xi}) \cdot \mathbb{E}(\tilde{\eta})$$

亦即

$$\mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1, \tilde{\eta} = 1) = \mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1) \cdot \mathbb{P}(\tilde{\eta} = 1)$$

从而

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\tilde{\xi} = 0, \tilde{\eta} = 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\tilde{\eta} = 1\right) - \mathbb{P}\left(\tilde{\xi} = 1, \tilde{\eta} = 1\right) \\ &= \mathbb{P}(\tilde{\eta} = 1)\left(1 - \mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1)\right) \\ &= \mathbb{P}(\tilde{\xi} = 0) \cdot \mathbb{P}(\tilde{\eta} = 1) \end{aligned}$$

令

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta - y_0}{y_1 - y_0}$$

则$\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$都是取值于0和1的随机变量，现只需证明它们相互独立。由ξ和η不相关知$\tilde{\xi}$和$\tilde{\eta}$不相关，即

$$\mathbb{E}(\tilde{\xi}\tilde{\eta}) = \mathbb{E}(\tilde{\xi}) \cdot \mathbb{E}(\tilde{\eta})$$

亦即

$$\mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1, \tilde{\eta} = 1) = \mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1) \cdot \mathbb{P}(\tilde{\eta} = 1)$$

从而

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\tilde{\xi} = 0, \tilde{\eta} = 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\tilde{\eta} = 1\right) - \mathbb{P}\left(\tilde{\xi} = 1, \tilde{\eta} = 1\right) \\
&= \mathbb{P}(\tilde{\eta} = 1)\left(1 - \mathbb{P}(\tilde{\xi} = 1)\right) \\
&= \mathbb{P}(\tilde{\xi} = 0) \cdot \mathbb{P}(\tilde{\eta} = 1)
\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=1,\tilde{\eta}=0\right)\\&=\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=1\right)-\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=1,\tilde{\eta}=1\right)\\&=\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=1\right)\cdot\mathbb{P}\left(\tilde{\eta}=0\right)\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=1,\tilde{\eta}=0\right)\\
&=\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=1\right)-\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=1,\tilde{\eta}=1\right)\\
&=\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=1\right)\cdot\mathbb{P}\left(\tilde{\eta}=0\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=0,\tilde{\eta}=0\right)\\
&=\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=0\right)-\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=0,\tilde{\eta}=1\right)\\
&=\mathbb{P}(\tilde{\xi}=0)\cdot\mathbb{P}(\tilde{\eta}=0)
\end{aligned}$$

类似地，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=1, \tilde{\eta}=0\right) \\
&=\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=1\right)-\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=1, \tilde{\eta}=1\right) \\
&=\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=1\right) \cdot \mathbb{P}\left(\tilde{\eta}=0\right) \\
&\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=0, \tilde{\eta}=0\right) \\
&=\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=0\right)-\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}=0, \tilde{\eta}=1\right) \\
&=\mathbb{P}(\tilde{\xi}=0) \cdot \mathbb{P}(\tilde{\eta}=0)
\end{aligned}
$$

所以$\tilde{\xi}$与$\tilde{\eta}$相互独立，从而ξ与η相互独立。

思考题： 设随机变量$\xi \sim N(0,1)$，试证明ξ与ξ^2不相关，但是不独立。

§4.3 条件数学期望

定义1: 离散型随机变量Y关于给定事件A的条件数学期望:

$$E[Y|A] = \sum_y yP(Y = y \mid A)$$

例4.3.1

掷均匀硬币4次，Y表示出正面的次数，$A=\{Y\leq 2\}$.
解:

$$p\{Y=y\}=$$

例4.3.1

掷均匀硬币4次，Y表示出正面的次数，$A=\{Y\le 2\}$.
解:

$$p\{Y=y\}=\binom{4}{y}2^{-4}=\binom{4}{y}/16 \quad (0\le y\le 4)$$

$$\Rightarrow P\{Y\le 2\}=$$

例4.3.1

掷均匀硬币4次，Y表示出正面的次数，$A=\{Y\le 2\}$.

解:

$$p\{Y=y\}=\binom{4}{y}2^{-4}=\binom{4}{y}/16 \quad (0\le y\le 4)$$

$$\Rightarrow P\{Y\le 2\}=(1+4+6)/16=11/16$$

$$\Rightarrow P\{Y=y\,|\,Y\le 2\}=$$

例4.3.1

掷均匀硬币4次，Y表示出正面的次数，$A = \{Y \le 2\}$.

解:

$$p\{Y = y\} = \binom{4}{y} 2^{-4} = \binom{4}{y}/16 \quad (0 \le y \le 4)$$

$$\Rightarrow P\{Y \le 2\} = (1 + 4 + 6)/16 = 11/16$$

$$\Rightarrow P\{Y = y \mid Y \le 2\} = \binom{4}{y}/11 \quad (0 \le y \le 2)$$

例4.3.1

掷均匀硬币4次，Y表示出正面的次数，$A = \{Y \leq 2\}$.
解:

$$p\{Y = y\} = \binom{4}{y} 2^{-4} = \binom{4}{y}/16 \quad (0 \leq y \leq 4)$$

$$\Rightarrow P\{Y \leq 2\} = (1+4+6)/16 = 11/16$$

$$\Rightarrow P\{Y = y \mid Y \leq 2\} = \binom{4}{y}/11 \ \ (0 \leq y \leq 2)$$

$$E(Y \mid Y \leq 2) =$$

例4.3.1

掷均匀硬币4次，Y表示出正面的次数，$A=\{Y\le 2\}$.
解:

$$p\{Y=y\}=\binom{4}{y}2^{-4}=\binom{4}{y}/16 \quad (0\le y\le 4)$$

$$\Rightarrow P\{Y\le 2\}=(1+4+6)/16=11/16$$

$$\Rightarrow P\{Y=y\mid Y\le 2\}=\binom{4}{y}/11 \quad (0\le y\le 2)$$

$$E(Y\mid Y\le 2)=\sum_{y=0}^{2} y\binom{4}{y}/11=16/11$$

性质

(i) $E[X+Y \mid A] = E[X \mid A] + E[Y \mid A]$

性质

(i) $E[X+Y\mid A]=E[X\mid A]+E[Y\mid A]$

(ii) $A_1,A_2,\ldots$是样本空间的一个分割，则

$$EY=\sum_k E[X\mid A_k]P(A_k)$$

证明:

$$E(Y)=$$

性质

（i）$E[X+Y \mid A]=E[X \mid A]+E[Y \mid A]$
（ii）$A_1, A_2, \ldots$是样本空间的一个分割，则

$$EY=\sum_k E[X \mid A_k]P(A_k)$$

证明：

$$E(Y)=\sum_y yP\{Y=y\}$$

$$=$$

性质

（i）$E[X+Y \mid A] = E[X \mid A] + E[Y \mid A]$

（ii）$A_1, A_2, \ldots$是样本空间的一个分割，则

$$EY = \sum_k E[X \mid A_k] P(A_k)$$

证明：

$$E(Y) = \sum_y y P\{Y = y\}$$

$$= \sum_y \left(\sum_k P\{Y = y \mid A_k\} P\{A_k\} \right)$$

$=$

性质

（i）$E[X+Y \mid A] = E[X \mid A] + E[Y \mid A]$
（ii）$A_1, A_2, \ldots$是样本空间的一个分割，则

$$EY = \sum_k E[X \mid A_k]P(A_k)$$

证明：

$$E(Y) = \sum_y yP\{Y = y\}$$

$$= \sum_y \left(\sum_k P\{Y = y \mid A_k\}P\{A_k\} \right)$$

$$= \sum_k \left(\sum_y yP\{Y = y \mid A_k\} \right) P\{A_k\} = \sum_k E(Y \mid A_k)P\{A_k\}$$

定义2

随机变量Y关于给定事件$X=x$的条件数学期望

（i）(X,Y)是离散型随机变量

$$E[Y \mid X=x]=\sum_{y} yP(Y=y \mid X=x)$$

定义2

随机变量Y关于给定事件$X=x$的条件数学期望

（i）(X,Y)是离散型随机变量

$$E[Y \mid X=x]=\sum_{y} yP(Y=y \mid X=x)$$

（ii）(X,Y)是连续型随机变量

$$E[Y \mid X=x]=\int y f_{y|x}(y \mid x)dy$$

定义3

随机变量Y关于给定随机变量X的条件数学期望

$$E[Y \mid X] = g(X)$$

其中$g(x) = E[Y \mid X = x]$

定义3

随机变量Y关于给定随机变量X的条件数学期望

$$E[Y \mid X] = g(X)$$

其中$g(x) = E[Y \mid X = x]$

全期望公式:

$$EY = E\{E[Y \mid X]\}$$

$$EX = E\{E[X \mid Y]\}$$

证明(1)

先考虑离散型的情形，

$$E[E(Y \mid X)] =$$

证明(1)

先考虑离散型的情形,

$$E[E(Y \mid X)] = E[g(X)]$$

$$=$$

证明(1)

先考虑离散型的情形，

$$E[E(Y \mid X)] = E[g(X)]$$

$$= \sum_x g(x) P\{X = x\}$$

$$=$$

证明(1)

先考虑离散型的情形，

$$E[E(Y \mid X)] = E[g(X)]$$

$$= \sum_x g(x) P\{X = x\}$$

$$= \sum_x E(Y \mid X = x) P\{X = x\}$$

$$=$$

证明(1)

先考虑离散型的情形，

$$E[E(Y \mid X)] = E[g(X)]$$

$$= \sum_x g(x)P\{X = x\}$$

$$= \sum_x E(Y \mid X = x)P\{X = x\}$$

$$= \sum_x \left[\sum_y yP\{Y = y \mid X = x\}\right] P\{X = x\}$$

$=$

$$= \sum_x \sum_y yP\{Y = y, X = x\}$$

$$=$$

$$= \sum_x \sum_y y P\{Y = y, X = x\}$$

$$= \sum_y y \sum_x P\{Y = y, X = x\}$$

$$=$$

$$= \sum_x \sum_y y P\{Y = y, X = x\}$$

$$= \sum_y y \sum_x P\{Y = y, X = x\}$$

$$= \sum_y y P\{Y = y\} = E(Y)$$

证明(2)

再证连续型

$$E[E[X \mid Y]] =$$

证明(2)

再证连续型

$$E[E[X \mid Y]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y = y] f_Y(y) dy$$

$$=$$

证明(2)

再证连续型

$$E[E[X \mid Y]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y = y] f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x, y) dx f_Y(y) dy$$

$$=$$

证明(2)

再证连续型

$$E[E[X \mid Y]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y = y] f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x, y) dx f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} f_Y(y) dx dy$$

$=$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy$$

$$=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy dx$$

$$=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$$

$$= E[X].$$

巴格达窃贼问题 一窃贼被关在有3个门的地牢中，其中第1个门通向自由，出这个门后走3个小时便回到地面;

巴格达窃贼问题 一窃贼被关在有3个门的地牢中，其中第1个门通向自由，出这个门后走3个小时便回到地面；第2个门通向一个地道，在此地道中走5个小时将返回地牢；

巴格达窃贼问题 一窃贼被关在有3个门的地牢中，其中第1个门通向自由，出这个门后走3个小时便回到地面；第2个门通向一个地道，在此地道中走5个小时将返回地牢；第3个门通向一个更长的地道，沿这个地道走7个小时也回到地牢。

巴格达窃贼问题 一窃贼被关在有3个门的地牢中，其中第1个门通向自由，出这个门后走3个小时便回到地面；第2个门通向一个地道，在此地道中走5个小时将返回地牢；第3个门通向一个更长的地道，沿这个地道走7个小时也回到地牢。如果窃贼每次选择3个门可能性总相等，求他为获自由而奔走的平均时间长。

设窃贼需走ξ个小时到达地面，并设η代表窃贼每第一次对3 个门的选择，则$\mathbb{P}(\eta = i) = 1/3$，$i = 1, 2, 3$。运用全期望公式

$$\mathbb{E}(\xi) =$$

巴格达窃贼问题 一窃贼被关在有3个门的地牢中，其中第1个门通向自由，出这个门后走3个小时便回到地面；第2个门通向一个地道，在此地道中走5个小时将返回地牢；第3个门通向一个更长的地道，沿这个地道走7个小时也回到地牢。如果窃贼每次选择3个门可能性总相等，求他为获自由而奔走的平均时间长。
设窃贼需走ξ个小时到达地面，并设η代表窃贼每第一次对3 个门的选择，则$\mathbb{P}(\eta=i)=1/3$，$i=1,2,3$。运用全期望公式

$$\mathbb{E}(\xi)=\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi|\eta)\big)$$

$$=$$

巴格达窃贼问题 一窃贼被关在有3个门的地牢中，其中第1个门通向自由，出这个门后走3个小时便回到地面；第2个门通向一个地道，在此地道中走5个小时将返回地牢；第3个门通向一个更长的地道，沿这个地道走7个小时也回到地牢。如果窃贼每次选择3个门可能性总相等，求他为获自由而奔走的平均时间长。

设窃贼需走ξ个小时到达地面，并设η代表窃贼每第一次对3 个门的选择，则$\mathbb{P}(\eta=i)=1/3$，$i=1,2,3$。运用全期望公式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi|\eta)\big)\\ &= \sum_{i=1}^{3}\mathbb{E}(\xi|\eta=i)\mathbb{P}(\eta=i)\\ &=\end{aligned}$$

巴格达窃贼问题 一窃贼被关在有3个门的地牢中，其中第1个门通向自由，出这个门后走3个小时便回到地面；第2个门通向一个地道，在此地道中走5个小时将返回地牢；第3个门通向一个更长的地道，沿这个地道走7个小时也回到地牢。如果窃贼每次选择3个门可能性总相等，求他为获自由而奔走的平均时间长。

设窃贼需走ξ个小时到达地面，并设η代表窃贼每第一次对3 个门的选择，则$\mathbb{P}(\eta=i)=1/3$，$i=1,2,3$。运用全期望公式

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi|\eta)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}(\xi|\eta=i)\mathbb{P}(\eta=i) \\
&= \frac{1}{3}\Big(3+\big(5+\mathbb{E}(\xi)\big)+\big(7+\mathbb{E}(\xi)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

巴格达窃贼问题 一窃贼被关在有3个门的地牢中，其中第1个门通向自由，出这个门后走3个小时便回到地面；第2个门通向一个地道，在此地道中走5个小时将返回地牢；第3个门通向一个更长的地道，沿这个地道走7个小时也回到地牢。如果窃贼每次选择3个门可能性总相等，求他为获自由而奔走的平均时间长。

设窃贼需走ξ个小时到达地面，并设η代表窃贼每第一次对3 个门的选择，则$\mathbb{P}(\eta=i)=1/3$，$i=1,2,3$。运用全期望公式

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi|\eta)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}(\xi|\eta=i)\mathbb{P}(\eta=i) \\
&= \frac{1}{3}\big(3+\big(5+\mathbb{E}(\xi)\big)+\big(7+\mathbb{E}(\xi)\big)\big)
\end{aligned}
$$

解方程得$\mathbb{E}(\xi)=15$。即平均来说，窃贼将在15小时后获得自由。

§4.4 随机变量分布的变换

- 概率母函数（Probability Generating Function ）

§4.4 随机变量分布的变换

- 概率母函数（Probability Generating Function ）
- 矩母函数（Moment Generating Function ）

§4.4 随机变量分布的变换

- 概率母函数（Probability Generating Function ）
- 矩母函数（Moment Generating Function ）
- 特征函数（Characteristic Function）

作用:

△ 可将卷积运算化成乘法运算;

§4.4 随机变量分布的变换

- 概率母函数（Probability Generating Function ）
- 矩母函数（Moment Generating Function ）
- 特征函数（Characteristic Function）

作用:

△ 可将卷积运算化成乘法运算;

△ 可将求各阶矩的积分运算化成微分运算;

§4.4 随机变量分布的变换

- 概率母函数（Probability Generating Function ）
- 矩母函数（Moment Generating Function ）
- 特征函数（Characteristic Function）

作用:

△ 可将卷积运算化成乘法运算;

△ 可将求各阶矩的积分运算化成微分运算;

△ 可将求随机变量序列的极限分布化成一般的函数极限问题;

概率母函数(Probability Generating Function)

定义：设X是只取正整数值的离散型随机变量，其分布列为：$p_k = P(\xi = k)$，定义：

$$G_X(s) = E(s^X) =$$

概率母函数(Probability Generating Function)

定义：设X是只取正整数值的离散型随机变量，其分布列为：$p_k = P(\xi = k)$，定义：

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \qquad |s| \le 1$$

称$G_X(s)$为X的概率母函数

概率母函数与分布列一一对应

（1） 分布列唯一决定概率母函数

概率母函数与分布列一一对应

（1） 分布列唯一决定概率母函数

（2） 概率母函数唯一决定分布列，即若

$$G_X(s) = G_Y(s), \quad \forall s \in [-1, 1]$$

则

$$P(X = k) = P(Y = k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

一些重要分布的概率母函数

Poisson分布： $p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\phi(s) =$$

一些重要分布的概率母函数

Poisson分布：$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\phi(s) = E(s^{\xi}) =$$

一些重要分布的概率母函数

Poisson分布： $p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\phi(s) = E(s^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$=$$

一些重要分布的概率母函数

Poisson分布： $p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\phi(s) = E(s^{\xi}) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\lambda)^k e^{-\lambda-\lambda s+\lambda s}}{k!}$$

$$=$$

一些重要分布的概率母函数

Poisson分布：$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\phi(s) = E(s^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\lambda)^k e^{-\lambda-\lambda s+\lambda s}}{k!}$$

$$= e^{\lambda s-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}$$

$$= e^{\lambda(s-1)}$$

一些重要分布的概率母函数

几何分布

$$p_k = p(1-p)^k, \qquad k = 0, \dots$$

$$\phi(s) = E(s^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k (1-p)^k p$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p[s(1-p)]^k$$

$$= \frac{p}{1-s(1-p)}$$

概率母函数与随机变量的矩

$$G_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-r+1)]$$

$$G'_X(1) = E(X)$$

$$Var(X) = G_X^{(2)}(1) - [G_X^{(1)}(1)]^2 + G_X^{(1)}(1)$$

概率母函数与随机变量的矩

$$G_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-r+1)]$$

$$G'_X(1) = E(X)$$

$$Var(X) = G_X^{(2)}(1) - [G_X^{(1)}(1)]^2 + G_X^{(1)}(1)$$

证明:

$$G_X^{(r)}(s) = \frac{d^r}{ds^r}[G_X(s)]$$

$$=$$

概率母函数与随机变量的矩

$$G_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)\ldots(X-r+1)]$$

$$G'_X(1) = E(X)$$

$$Var(X) = G_X^{(2)}(1) - [G_X^{(1)}(1)]^2 + G_X^{(1)}(1)$$

证明:

$$\begin{aligned} G_X^{(r)}(s) &= \frac{d^r}{ds^r}[G_X(s)] \\ &= \frac{d^r}{ds^r}\left[\sum_k p_k s^k\right] \end{aligned}$$

$$=$$

概率母函数与随机变量的矩

$$G_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-r+1)]$$

$$G'_X(1) = E(X)$$

$$Var(X) = G_X^{(2)}(1) - [G_X^{(1)}(1)]^2 + G_X^{(1)}(1)$$

证明:

$$G_X^{(r)}(s) = \frac{d^r}{ds^r}[G_X(s)]$$
$$= \frac{d^r}{ds^r}\left[\sum_k p_k s^k\right]$$
$$= \sum_k p_k k(k-1)\dots(k-r+1)s^{k-r}$$

独立随机变量和的母函数

设X, Y是相互独立的随机变量，则

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$$

独立随机变量和的母函数

设X, Y是相互独立的随机变量，则

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$$

证明:

$$G_Z(s) = E(s^Z) =$$

独立随机变量和的母函数

设X,Y是相互独立的随机变量，则

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$$

证明:

$$G_Z(s) = E(s^Z) = E(S^{X+Y})$$

$$=$$

独立随机变量和的母函数

设X, Y是相互独立的随机变量，则

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$$

证明:

$$G_Z(s) = E(s^Z) = E(S^{X+Y})$$

$$= E(s^X)E(s^Y) \quad (5)$$

$$= G_X(s)G_Y(s)$$

独立随机变量和的母函数

设X,Y是相互独立的随机变量，则

$$G_{X+Y}(s)=G_X(s)G_Y(s)$$

证明:

$$G_Z(s)=E(s^Z)=E(S^{X+Y})$$

$$=E(s^X)E(s^Y) \quad (5)$$

$$=G_X(s)G_Y(s)$$

系:

$$G_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(s)=G_{X_1}(s)\ldots G_{X_n}(s)$$

其中$X_1,\ldots,X_n$是相互独立的随机变量

独立随机变量的随机和的母函数

设$N, X_1, \ldots, X_n \ldots$是相互独立的只取非负整数值的随机变量序列，且$X_1, \ldots, X_n$有相同的分布，令:

$$S_N = X_1 + \cdots + X_N$$

则:

$$G_{S_N} =$$

独立随机变量的随机和的母函数

设$N, X_1, \ldots, X_n \ldots$是相互独立的只取非负整数值的随机变量序列，且$X_1, \ldots, X_n$有相同的分布，令:

$$S_N = X_1 + \cdots + X_N$$

则:

$$G_{S_N} = G_N(G_X(s))$$

$$E(S_N) = E(N)E(X)$$

$$Var(S_N) = E(N)Var(X) + Var(N)[E(X)]^2$$

证明

证明:

$$G_{S_N}(s) = E(s^{S_N})$$

$$=$$

证明

证明:

$$G_{S_N}(s) = E(s^{S_N})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_N} \mid N = n)P(N = n)$$

$$=$$

证明

证明:

$$G_{S_N}(s) = E(s^{S_N})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_N} \mid N = n)P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_n} P(N = n)$$

$$=$$

证明

证明:

$$G_{S_N}(s) = E(s^{S_N})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_N} \mid N = n)P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_n} P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} G_{X_1+\cdots+X_n}(s)P(N = n)$$

$$=$$

证明

证明:

$$G_{S_N}(s) = E(s^{S_N})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_N} \mid N = n)P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_n} P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} G_{X_1+\cdots+X_n}(s)P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [G_X(s)]^n P(N = n)$$

$$= G_N(G_X(s))$$

证明（续）

先证:

$$E(S_N) = E(N)E(X)$$

事实上

$$\frac{d}{ds}[G_{S_N}(s)] = \frac{d}{ds}[G_N(G_X(s))]$$

$$= \frac{dG_N(u)}{du}\frac{du}{ds}$$

其中 $u = G_X(s)$

$$E(S_N) = \frac{d}{ds}[G_{S_N}(s)]|_{s=1} = [G_N^{(1)}(1)][G_X^{(1)}(1)] = E(N)E(X)$$

$$u = G_X(1) = 1$$

概率母函数的一个应用

掷5个骰子，求所得总和为15的概率。

例4.4.1

（Possion鸡）一个母鸡产N个鸡蛋，N是参数为λ的Poisson分布，每个鸡蛋以概率为p可孵化出一个小鸡，且不同鸡蛋孵出小鸡是相互独立的。求孵化出小鸡数的分布。

设Z表示孵化出小鸡的数目，

例4.4.1

（Possion鸡）一个母鸡产N个鸡蛋，N是参数为λ的Poisson分布，每个鸡蛋以概率为p可孵化出一个小鸡，且不同鸡蛋孵出小鸡是相互独立的。求孵化出小鸡数的分布。

设Z表示孵化出小鸡的数目，$Z = X_1 + \cdots + X_N$ 则

$$G_N(s) =$$

例4.4.1

（Possion鸡）一个母鸡产N个鸡蛋，N是参数为λ的Poisson分布，每个鸡蛋以概率为p可孵化出一个小鸡，且不同鸡蛋孵出小鸡是相互独立的。求孵化出小鸡数的分布。

设Z表示孵化出小鸡的数目，$Z = X_1 + \cdots + X_N$ 则

$$G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}, G_X(s) =$$

例4.4.1

（Possion鸡）一个母鸡产N个鸡蛋，N是参数为λ的Poisson分布，每个鸡蛋以概率为p可孵化出一个小鸡，且不同鸡蛋孵出小鸡是相互独立的。求孵化出小鸡数的分布。

设Z表示孵化出小鸡的数目，$Z = X_1 + \cdots + X_N$ 则

$$G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}, G_X(s) = q + ps$$

$$G_Z(s) =$$

例4.4.1

（Possion鸡）一个母鸡产N个鸡蛋，N是参数为λ的Poisson分布，每个鸡蛋以概率为p可孵化出一个小鸡，且不同鸡蛋孵出小鸡是相互独立的。求孵化出小鸡数的分布。

设Z表示孵化出小鸡的数目，$Z = X_1 + \cdots + X_N$ 则

$$G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}, G_X(s) = q + ps$$

$$G_Z(s) = G_N(G_X(s)) = e^{\lambda p(s-1)}$$

所以$Z \sim Poisson(\lambda p)$

Poisson分布的再生性

$X_i \sim P(\lambda_i)$相互独立，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

$$G_{X_i}(s) = e^{\lambda_i(s-1)}$$

$$G_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(s-1)}$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)(s-1)}$$

矩母函数（Moment Generating Functions）

定义:

$$M_X(\theta) = \mathrm{E}(e^{\theta X}) = \begin{cases} \sum_x e^{\theta x}\mathrm{P}(X = x) & \text{X是离散型r. v} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f_X(x)dx & \text{X是连续型r. v} \end{cases}$$

矩母函数（Moment Generating Functions）

定义:

$$M_X(\theta) = \mathrm{E}(e^{\theta X}) = \begin{cases} \sum\limits_x e^{\theta x}\mathrm{P}(X = x) & X\text{是离散型r. v} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f_X(x)dx & X\text{是连续型r. v} \end{cases}$$

矩母函数与分布间的一一对应

矩母函数（Moment Generating Functions）

定义:

$$M_X(\theta) = \mathrm{E}(e^{\theta X}) = \begin{cases} \sum_x e^{\theta x} \mathrm{P}(X = x) & \text{X是离散型r. v} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f_X(x) dx & \text{X是连续型r. v} \end{cases}$$

矩母函数与分布间的一一对应

唯一性定理：如果，$M_X(\theta) = M_Y(\theta) < \infty$在$\theta$的某个区间上成立，则随机变量$X$与$Y$同分布。

矩母函数与随机变量X的各阶矩

注意到:

$$\frac{d^r}{d\theta^r}\{M_X(\theta)\} =$$

矩母函数与随机变量X的各阶矩

注意到:

$$\frac{d^r}{d\theta^r}\{M_X(\theta)\} = \frac{d^r}{d\theta^r}\{E(e^{\theta X})\}$$

$$=$$

矩母函数与随机变量X的各阶矩

注意到:

$$\frac{d^r}{d\theta^r}\{M_X(\theta)\} = \frac{d^r}{d\theta^r}\{E(e^{\theta X})\}$$

$$= E\left\{\frac{d^r}{d\theta^r}(e^{\theta X})\right\}$$

$$=$$

矩母函数与随机变量X的各阶矩

注意到:

$$\frac{d^r}{d\theta^r}\{M_X(\theta)\} = \frac{d^r}{d\theta^r}\{E(e^{\theta X})\}$$

$$= E\left\{\frac{d^r}{d\theta^r}(e^{\theta X})\right\}$$

$$= E(X^r e^{\theta X})$$

于是:

矩母函数与随机变量X的各阶矩

注意到:

$$\frac{d^r}{d\theta^r}\{M_X(\theta)\} = \frac{d^r}{d\theta^r}\{E(e^{\theta X})\}$$

$$= E\left\{\frac{d^r}{d\theta^r}(e^{\theta X})\right\}$$

$$= E(X^r e^{\theta X})$$

于是:

$$\left[\frac{d^r}{d\theta^r}\{M_X(\theta)\}\right]_{\theta=0} = E(X^r)$$

性质1

性质1:

$$M_{a+bX}(\theta) = E(e^{\theta(a+bX)}) = e^{a\theta} M_X(b\theta)$$

性质1

性质1:

$$M_{a+bX}(\theta) = E(e^{\theta(a+bX)}) = e^{a\theta} M_X(b\theta)$$

例: $Z \sim N(0,1)$ 则:

$$M_Z(\theta) = E(e^{\theta Z})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= exp(\frac{1}{2}\theta^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\{-\frac{1}{2}(z-\theta)^2\} dz$$

从而: $M_Z(\theta) = exp(\frac{1}{2}\theta^2)$

性质1

再考虑： $X = \mu + \sigma Z$,$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$M_X(\theta) =$$

性质1

再考虑：$X=\mu+\sigma Z$,$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$M_X(\theta)=M_{\mu+\sigma Z}(\theta)$$

$$=e^{\mu\theta}M_Z(\sigma\theta)$$

$$=$$

性质1

再考虑: $X = \mu + \sigma Z$,$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$M_X(\theta) = M_{\mu+\sigma Z}(\theta)$$

$$= e^{\mu\theta} M_Z(\sigma\theta)$$

$$= exp(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

于是:

$$M_{X-\mu}(\theta) = e^{-\mu\theta} M_X(\theta) =$$

性质1

再考虑：$X=\mu+\sigma Z$,$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$M_X(\theta)=M_{\mu+\sigma Z}(\theta)$$

$$=e^{\mu\theta}M_Z(\sigma\theta)$$

$$=exp(\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

于是：

$$M_{X-\mu}(\theta)=e^{-\mu\theta}M_X(\theta)=exp(\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

$$=$$

性质1

再考虑: $X=\mu+\sigma Z$,$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$M_X(\theta)=M_{\mu+\sigma Z}(\theta)$$

$$=e^{\mu\theta}M_Z(\sigma\theta)$$

$$=exp(\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

于是:

$$M_{X-\mu}(\theta)=e^{-\mu\theta}M_X(\theta)=exp(\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)^r}{r!}=$$

性质1

再考虑: $X=\mu+\sigma Z$,$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$M_X(\theta)=M_{\mu+\sigma Z}(\theta)$$

$$=e^{\mu\theta}M_Z(\sigma\theta)$$

$$=exp(\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

于是:

$$M_{X-\mu}(\theta)=e^{-\mu\theta}M_X(\theta)=exp(\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)^r}{r!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sigma^{2r}}{2^r r!}\theta^{2r}$$

$$=$$

性质1

再考虑：$X=\mu+\sigma Z$,$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$M_X(\theta)=M_{\mu+\sigma Z}(\theta)$$

$$=e^{\mu\theta}M_Z(\sigma\theta)$$

$$=exp(\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

于是：

$$M_{X-\mu}(\theta)=e^{-\mu\theta}M_X(\theta)=exp(\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)^r}{r!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sigma^{2r}}{2^r r!}\theta^{2r}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sigma^{2r}}{2^r}\frac{(2r)!}{r!}\frac{\theta^{2r}}{(2r)!}$$

而

$$\mu_r = \left[\frac{d^r}{d\theta^r}\{M_{X-\mu}(\theta)\}\right]_{\theta=0}$$

从而

$$\mu_{2r+1} = 0, r = 1, 2, \ldots$$

$$\mu_{2r} = \frac{\sigma^{2r}(2r)!}{2^r r!}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

特别

$$\mu_2 = \sigma^2, \mu_4 = 3\sigma^4$$

性质2

设X, Y是相互独立的随机变量，则

$$M_{X+Y}(\theta) = M_X(\theta) M_Y(\theta)$$

证明:

$$M_{X+Y}(\theta) =$$

性质2

设X,Y是相互独立的随机变量，则

$$M_{X+Y}(\theta)=M_X(\theta)M_Y(\theta)$$

证明：

$$M_{X+Y}(\theta)=E\left(e^{\theta(X+Y)}\right)$$

$$=E\left(e^{\theta X}e^{\theta Y}\right)$$

$$=$$

性质2

设X,Y是相互独立的随机变量，则

$$M_{X+Y}(\theta)=M_X(\theta)M_Y(\theta)$$

证明：

$$M_{X+Y}(\theta)=E\left(e^{\theta(X+Y)}\right)$$

$$=E\left(e^{\theta X}e^{\theta Y}\right)$$

$$=E(e^{\theta X})E(e^{\theta Y})$$

$$=M_X(\theta)M_Y(\theta)$$

系：设$X_1,\dots,X_n$是独立随机变量，则：

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(\theta)=$$

性质2

设X, Y是相互独立的随机变量，则

$$M_{X+Y}(\theta) = M_X(\theta)M_Y(\theta)$$

证明:

$$M_{X+Y}(\theta) = E\left(e^{\theta(X+Y)}\right)$$

$$= E\left(e^{\theta X}e^{\theta Y}\right)$$

$$= E(e^{\theta X})E(e^{\theta Y})$$

$$= M_X(\theta)M_Y(\theta)$$

系：设$X_1, \ldots, X_n$是独立随机变量，则:

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(\theta) = M_{X_1}(\theta)M_{X_2}(\theta)\ldots M_{X_n}(\theta)$$

例4.4.2

设$Z_1,\ldots,Z_n$是相互独立的标准正态分布随机变量，则:

$$V = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi_n^2$$

证明：设Z是标准正分布的随机变量

$$M_{Z^2}(\theta) =$$

例4.4.2

设$Z_1, \ldots, Z_n$是相互独立的标准正态分布随机变量，则：

$$V = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi_n^2$$

证明：设Z是标准正分布的随机变量

$$M_{Z^2}(\theta) = E(e^{\theta Z^2}) =$$

例4.4.2

设$Z_1,\ldots,Z_n$是相互独立的标准正态分布随机变量，则:

$$V = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi_n^2$$

证明：设Z是标准正分布的随机变量

$$M_{Z^2}(\theta) = E(e^{\theta Z^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta z^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$=$$

例4.4.2

设$Z_1,\ldots,Z_n$是相互独立的标准正态分布随机变量，则：

$$V = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi_n^2$$

证明：设Z是标准正分布的随机变量

$$M_{Z^2}(\theta) = E(e^{\theta Z^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta z^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\{-\frac{1}{2}(1-2\theta)z^2\} dz$$

当$0 < \theta < 1/2$时，作变换$y = \sqrt{1-2\theta}z$

$M_{Z^2}(\theta) =$

例4.4.2

设$Z_1,\dots,Z_n$是相互独立的标准正态分布随机变量，则：

$$V=Z_1^2+\dots+Z_n^2\sim\chi_n^2$$

证明：设Z是标准正分布的随机变量

$$M_{Z^2}(\theta)=E(e^{\theta Z^2})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta z^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\{-\frac{1}{2}(1-2\theta)z^2\}dz$$

当$0<\theta<1/2$时，作变换$y=\sqrt{1-2\theta}z$

$$M_{Z^2}(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}\frac{1}{\sqrt{(1-2\theta)}}dy=(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}},\ 0<\theta<1/2$$

例4.4.2(证明)

于是:

$$M_V(\theta) =$$

例4.4.2(证明)

于是:

$$M_V(\theta) = (1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}\dots(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=$$

例4.4.2(证明)

于是:

$$M_V(\theta) = (1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}\dots(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}, \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}$$

另一方面，χ_n^2的密度函数为

例4.4.2(证明)

于是:

$$M_V(\theta) = (1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}\dots(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}, \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}$$

另一方面，χ_n^2的密度函数为

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} w^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}w}, \quad w \geq 0$$

例4.4.2(证明)

其矩母函数为:

例4.4.2(证明)

其矩母函数为:

$$\int_0^\infty e^{\theta w}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}w}dw$$

$$=$$

例4.4.2(证明)

其矩母函数为:

$$\int_0^\infty e^{\theta w}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}w}dw$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}exp\{-\frac{1}{2}w(1-2\theta)\}dw$$

$$=$$

例4.4.2(证明)

其矩母函数为:

$$\int_0^{\infty} e^{\theta w}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}w}dw$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}exp\{-\frac{1}{2}w(1-2\theta)\}dw$$

$$=(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{\infty}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-t}dt$$

$$=$$

例4.4.2(证明)

其矩母函数为:

$$\int_0^\infty e^{\theta w}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}w}dw$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}exp\{-\frac{1}{2}w(1-2\theta)\}dw$$

$$=(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1}e^{-t}dt$$

$$=(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}$$

$$=$$

例4.4.2(证明)

其矩母函数为:

$$\int_0^\infty e^{\theta w}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}w}dw$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}exp\{-\frac{1}{2}w(1-2\theta)\}dw$$

$$=(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1}e^{-t}dt$$

$$=(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}$$

$$=M_V(\theta)$$

多元矩母函数

定义:

$$M_{X,Y}(\theta_1,\theta_2) =$$

多元矩母函数

定义:

$$M_{X,Y}(\theta_1, \theta_2) = E(e^{\theta_1 X + \theta_2 Y})$$

多元矩母函数

定义:

$$M_{X,Y}(\theta_1, \theta_2) = E(e^{\theta_1 X + \theta_2 Y})$$

性质1:

$$\left[\frac{\partial^{r+s} M_{X,Y}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^r \partial \theta_2^s}\right]_{\theta_1=\theta_2=0} = E(X^r Y^s)$$

多元矩母函数

定义:

$$M_{X,Y}(\theta_1,\theta_2)=E(e^{\theta_1 X+\theta_2 Y})$$

性质1:

$$\left[\frac{\partial^{r+s}M_{X,Y}(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1^r\partial\theta_2^s}\right]_{\theta_1=\theta_2=0}=E(X^rY^s)$$

性质2:

$$M_{aX+bY}(\theta)=E\left(e^{(aX+bY)\theta}\right)=E\left(e^{(a\theta)X+(b\theta)Y}\right)=M_{X,Y}(a\theta,b\theta)$$

例4.4.3

$$(U,V) \sim N(0,0;1,1;\rho)$$

例4.4.3

$(U,V) \sim N(0,0;1,1;\rho)$

$$M_{U,V}(\theta_1,\theta_2) =$$

例4.4.3

$(U,V) \sim N(0,0;1,1;\rho)$

$$M_{U,V}(\theta_1,\theta_2) = E(e^{\theta_1 U + \theta_2 V})$$

$=$

例4.4.3

$$(U,V)\sim N(0,0;1,1;\rho)$$

$$M_{U,V}(\theta_1,\theta_2)=E(e^{\theta_1 U+\theta_2 V})$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta_1 u+\theta_2 v}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2-2\rho uv+v^2]\right\}dudv$$

$$=$$

例4.4.3

$(U, V) \sim N(0, 0; 1, 1; \rho)$

$$M_{U,V}(\theta_1, \theta_2) = E(e^{\theta_1 U + \theta_2 V})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta_1 u + \theta_2 v} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2 - 2\rho uv + v^2]\right\} dudv$$

$$= exp\{\frac{1}{2}(\theta_1^2 + 2\rho\theta_1\theta_2 + \theta_2^2)\}$$

例4.4.3

$$(U,V)\sim N(0,0;1,1;\rho)$$

$$M_{U,V}(\theta_1,\theta_2)=E(e^{\theta_1 U+\theta_2 V})$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta_1 u+\theta_2 v}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2-2\rho uv+v^2]\right\}dudv$$

$$=exp\{\frac{1}{2}(\theta_1^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2^2)\}$$

令: $X=\mu_x+\sigma_x U, Y=\mu_y+\sigma_y V$

例4.4.3

$$(U,V) \sim N(0,0;1,1;\rho)$$

$$M_{U,V}(\theta_1,\theta_2) = E(e^{\theta_1 U+\theta_2 V})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta_1 u+\theta_2 v}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2-2\rho uv+v^2]\right\}dudv$$

$$= exp\{\frac{1}{2}(\theta_1^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2^2)\}$$

令: $X=\mu_x+\sigma_x U, Y=\mu_y+\sigma_y V$
则:
$(U,V)\sim N(0,0;1,1;\rho) \iff (X,Y)\sim N(\mu_x,\mu_y;\sigma_x^2,\sigma_y^2;\rho)$ (为什么?)

例4.4.3（续）

从而

$$M_{X,Y}(\theta_1, \theta_2) =$$

例4.4.3（续）

从而

$$M_{X,Y}(\theta_1, \theta_2) = E\left[e^{\theta_1(\mu_x+\sigma_x U)+\theta_2(\mu_y+\sigma_y V)}\right]$$

$$=$$

例4.4.3（续）

从而

$$M_{X,Y}(\theta_1,\theta_2) = E\left[e^{\theta_1(\mu_x+\sigma_x U)+\theta_2(\mu_y+\sigma_y V)}\right]$$

$$= e^{(\theta_1\mu_x+\theta_2\mu_y)} M_{U,V}(\theta_1\sigma_x,\theta_2\sigma_y)$$

$$=$$

例4.4.3（续）

从而

$$M_{X,Y}(\theta_1,\theta_2) = E\left[e^{\theta_1(\mu_x+\sigma_x U)+\theta_2(\mu_y+\sigma_y V)}\right]$$

$$= e^{(\theta_1\mu_x+\theta_2\mu_y)} M_{U,V}(\theta_1\sigma_x, \theta_2\sigma_y)$$

$$= exp\{(\theta_1\mu_x+\theta_2\mu_y)+\frac{1}{2}(\theta_1^2\sigma_x^2+2\theta_1\theta_2\rho\sigma_x\sigma_y+\theta_2^2\sigma_y^2)\}$$

例4.4.4

若$(X,Y)\sim N(\mu_x,\mu_y;\sigma_x^2,\sigma_y^2;\rho)$则对任意常数$a,b$有:
$aX+bY\sim N(a\mu_x+b\mu_y,\ a^2\sigma_x^2+2ab\rho\sigma_x\sigma_y+b^2\sigma_y^2)$。
事实上,

$$M_{aX+bY}(\theta)=$$

例4.4.4

若$(X,Y) \sim N(\mu_x,\mu_y;\sigma_x^2,\sigma_y^2;\rho)$则对任意常数$a,b$有:
$aX+bY \sim N(a\mu_x+b\mu_y,\ a^2\sigma_x^2+2ab\rho\sigma_x\sigma_y+b^2\sigma_y^2)$。
事实上,

$$M_{aX+bY}(\theta)=Ee^{\theta(aX+bY)}=$$

例4.4.4

若$(X,Y) \sim N(\mu_x,\mu_y;\sigma_x^2,\sigma_y^2;\rho)$则对任意常数$a,b$有:
$aX+bY \sim N(a\mu_x+b\mu_y,\ a^2\sigma_x^2+2ab\rho\sigma_x\sigma_y+b^2\sigma_y^2)$。
事实上,

$$M_{aX+bY}(\theta) = Ee^{\theta(aX+bY)} = M_{X,Y}(a\theta,b\theta)$$

$$=$$

例4.4.4

若$(X,Y) \sim N(\mu_x, \mu_y; \sigma_x^2, \sigma_y^2; \rho)$则对任意常数$a,b$有：
$aX + bY \sim N(a\mu_x + b\mu_y,\ a^2\sigma_x^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_y + b^2\sigma_y^2)$。
事实上，

$$M_{aX+bY}(\theta) = Ee^{\theta(aX+bY)} = M_{X,Y}(a\theta, b\theta)$$

$$= exp\{(a\mu_x + b\mu_y)\theta + \frac{1}{2}(a^2\sigma_x^2 + 2abcov(X,Y) + b^2\sigma_y^2)\theta^2\}$$

例4.4.4（续）

这正好是分布

$$N(a\mu_x + b\mu_y,\ a^2\sigma_x^2 + 2abcov(X, Y) + b^2\sigma_y^2)$$

的矩母函数。故:

$$aX+bY \sim N(aE(X)+bE(Y), a^2Var(X)+2abCov(X, Y)+b^2Var(Y))$$

例4.4.4（续）

这正好是分布

$$N(a\mu_x + b\mu_y,\ a^2\sigma_x^2 + 2abcov(X,Y) + b^2\sigma_y^2)$$

的矩母函数。故:

$$aX+bY \sim N(aE(X)+bE(Y), a^2Var(X)+2abCov(X,Y)+b^2Var(Y))$$

更一般地，设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从多元正态分布,则:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim$$

例4.4.4（续）

这正好是分布

$$N(a\mu_x + b\mu_y,\ a^2\sigma_x^2 + 2abcov(X,Y) + b^2\sigma_y^2)$$

的矩母函数。故:

$$aX+bY \sim N(aE(X)+bE(Y), a^2Var(X)+2abCov(X,Y)+b^2Var(Y))$$

更一般地，设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从多元正态分布,则:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i), \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)+2\sum_{i<j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)\right)$$

复数复习

(1) 欧拉公式: $e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$

复数复习

(1) 欧拉公式：$e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$

(2) 复数的共轭：$\overline{a+bi} = a - bi$

复数复习

(1) 欧拉公式: $e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$

(2) 复数的共轭: $\overline{a+bi} = a - bi$

(3) 复数的模: $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

复数复习

(1) 欧拉公式: $e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$

(2) 复数的共轭: $\overline{a+bi} = a - bi$

(3) 复数的模: $|\ a+bi\ | = \sqrt{a^2+b^2}$

存在实数θ，使得复数z的三角表示式

为$z = |z|e^{i\theta} \triangleq |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$，称$\theta$为复数$z$的**辐角**。

复值随机变量

设ξ,η为随机变量，称$\zeta=\xi+i\eta$为**复值随机变量**，

$$\mathbb{E}(\zeta) \triangleq$$

复值随机变量

设ξ,η为随机变量，称$\zeta=\xi+i\eta$为**复值随机变量**，

$$\mathbb{E}(\zeta)\triangleq\mathbb{E}(\xi)+i\mathbb{E}(\eta)$$

为ζ的**数学期望**。

复值随机变量

设ξ,η为随机变量，称$\zeta=\xi+i\eta$为**复值随机变量**，

$$\mathbb{E}(\zeta)\triangleq\mathbb{E}(\xi)+i\mathbb{E}(\eta)$$

为ζ的**数学期望**。

若随机向量(ξ_1,η_1)与(ξ_2,η_2)相互独立，则称复值随机变量$\zeta_1=\xi_1+i\eta_1$与$\zeta_2=\xi_2+i\eta_2$相互独立。

特征函数

定义: 设X 是一随机变量，称

$$\varphi(t) = E\{exp(itX)\}$$

为X的特征函数. $i = \sqrt{-1}$是虚数单位.

特征函数

定义: 设X 是一随机变量，称

$$\varphi(t) = E\{exp(itX)\}$$

为X的特征函数. $i = \sqrt{-1}$是虚数单位.
(1)当X为离散随机变量时,

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$$

特征函数

定义: 设X 是一随机变量，称

$$\varphi(t)=E\{exp(itX)\}$$

为X的特征函数. $i=\sqrt{-1}$是虚数单位.
(1)当X为离散随机变量时,

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{itx_k}p_k$$

即:

$$\varphi(t)=\sum_{k}\cos(tx_k)p_k+i\sum_{k}\sin(tx_k)p_k$$

特征函数

定义: 设X 是一随机变量，称

$$\varphi(t) = E\{exp(itX)\}$$

为X的特征函数. $i = \sqrt{-1}$是虚数单位.
(1)当X为离散随机变量时,

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$$

即:

$$\varphi(t) = \sum_{k} \cos(tx_k) p_k + i \sum_{k} \sin(tx_k) p_k$$

(2)当 X 为连续随机变量时，

(2)当X为连续随机变量时，

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)dx$$

(2)当X为连续随机变量时，

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx$$

$$\begin{aligned}\varphi(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) p(x) dx \\ & + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) p(x) dx\end{aligned}$$

注：对任意随机变量X，其特征函数总存在。

设$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$，$\eta \sim P(\lambda)$，$\zeta \sim G(p)$，求它们的特征函数。

设$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$，$\eta \sim P(\lambda)$，$\zeta \sim G(p)$，求它们的特征函数。

$f_\xi(t) = q + pe^{it}$

设$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$，$\eta \sim P(\lambda)$，$\zeta \sim G(p)$，求它们的特征函数。

$f_\xi(t) = q + pe^{it}$

$$f_\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

设$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$，$\eta \sim P(\lambda)$，$\zeta \sim G(p)$，求它们的特征函数。

$f_\xi(t) = q + pe^{it}$

$$f_\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

设$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$，$\eta \sim P(\lambda)$，$\zeta \sim G(p)$，求它们的特征函数。

$f_\xi(t) = q + pe^{it}$

$$f_\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$f_\zeta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} q^{k-1} p =$$

设$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$，$\eta \sim P(\lambda)$，$\zeta \sim G(p)$，求它们的特征函数。

$f_\xi(t) = q + pe^{it}$

$$f_\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$f_\zeta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} q^{k-1} p = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$$

(1) 对于复数z有

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

(2)

(1) 对于复数z有

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

(2) 对于任何复数z_1和z_2有$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

设$\xi \sim \Gamma(\lambda, 1)$，求其特征函数。

设$\xi \sim \Gamma(\lambda, 1)$，求其特征函数。

$$f(t) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \cos(tx) dx + i \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \sin(tx) dx$$

设$\xi \sim \Gamma(\lambda, 1)$，求其特征函数。

$$f(t) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \cos(tx) dx + i \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \sin(tx) dx$$

记

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \cos(tx) dx$$

设$\xi \sim \Gamma(\lambda, 1)$，求其特征函数。

$$\begin{aligned} f(t) = &\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cos(tx) dx \\ &+ i \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \sin(tx) dx \end{aligned}$$

记

$$J_1 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \cos(tx) dx$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin(tx) dx$$

设$\xi \sim \Gamma(\lambda, 1)$，求其特征函数。

$$f(t) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \cos(tx)dx + i\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \sin(tx)dx$$

记

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \cos(tx)dx$$

$$J_2 = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \sin(tx)dx$$

利用分部积分公式得

$$J_1 = \frac{\lambda}{t} J_2, \quad J_2 = \frac{1}{t} - \frac{\lambda}{t} J_1$$

利用分部积分公式得

$$J_1 = \frac{\lambda}{t} J_2, \quad J_2 = \frac{1}{t} - \frac{\lambda}{t} J_1$$

因此

$$J_1 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2}, \quad J_2 = \frac{t}{\lambda^2 + t^2}$$

利用分部积分公式得

$$J_1 = \frac{\lambda}{t} J_2, \quad J_2 = \frac{1}{t} - \frac{\lambda}{t} J_1$$

因此

$$J_1 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2}, \quad J_2 = \frac{t}{\lambda^2 + t^2}$$

所以ξ的特征函数

$$f(t) = \left(1 - i\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$$

（反演公式）

（反演公式）设$f(t)$和$F(x)$分别是随机变量ξ的特征函数和分布函数，则对任何实数a, b有

$$\frac{F(b+0)+F(b)}{2}-\frac{F(a+0)+F(a)}{2} = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}f(t)dt$$

当a和b为$F(x)$的连续点时，等号左端变为$F(b)-F(a)$。

（反演公式） 设$f(t)$和$F(x)$分别是随机变量ξ的特征函数和分布函数，则对任何实数a,b有

$$\frac{F(b+0)+F(b)}{2}-\frac{F(a+0)+F(a)}{2}$$
$$=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}f(t)dt$$

当a和b为$F(x)$的连续点时，等号左端变为$F(b)-F(a)$。
（唯一性定理） 分布函数由特征函数所唯一确定。

（反演公式） 设$f(t)$和$F(x)$分别是随机变量ξ的特征函数和分布函数，则对任何实数a,b有

$$\frac{F(b+0)+F(b)}{2}-\frac{F(a+0)+F(a)}{2} = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}f(t)dt$$

当a和b为$F(x)$的连续点时，等号左端变为$F(b)-F(a)$。

（唯一性定理） 分布函数由特征函数所唯一确定。

分布、分布函数和特征函数相互唯一确定。可以由特征函数确定分布，因此应记住一些常用分布的特征函数。

(反演公式) 设$f(t)$和$F(x)$分别是随机变量ξ的特征函数和分布函数，则对任何实数a,b有

$$\frac{F(b+0)+F(b)}{2}-\frac{F(a+0)+F(a)}{2} = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}f(t)dt$$

当a和b为$F(x)$的连续点时，等号左端变为$F(b)-F(a)$。
(唯一性定理) 分布函数由特征函数所唯一确定。
分布、分布函数和特征函数相互唯一确定。可以由特征函数确定分布，因此应记住一些常用分布的特征函数。
若特征函数$f(t)$绝对可积，则对应的分布函数$F(x)$为连续型，

（反演公式） 设$f(t)$和$F(x)$分别是随机变量ξ的特征函数和分布函数，则对任何实数a,b有

$$\frac{F(b+0)+F(b)}{2}-\frac{F(a+0)+F(a)}{2} = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}f(t)dt$$

当a和b为$F(x)$的连续点时，等号左端变为$F(b)-F(a)$。

（唯一性定理） 分布函数由特征函数所唯一确定。

分布、分布函数和特征函数相互唯一确定。可以由特征函数确定分布，因此应记住一些常用分布的特征函数。

若特征函数$f(t)$绝对可积，则对应的分布函数$F(x)$为连续型，且其密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}f(t)dt$$

设$f(t)$是某随机变量ξ的特征函数，则有

1°

设$f(t)$是某随机变量ξ的特征函数，则有
1° $|f(t)| \le f(0) = 1$。

设$f(t)$是某随机变量ξ的特征函数，则有

1° $|f(t)| \leq f(0) = 1$。

2°

设$f(t)$是某随机变量ξ的特征函数，则有
1° $|f(t)| \le f(0) = 1$。
2° 共轭对称性：$f(-t) = \overline{f(t)}$。

设$f(t)$是某随机变量ξ的特征函数，则有

1° $|f(t)| \le f(0) = 1$。

2° 共轭对称性：$f(-t) = \overline{f(t)}$。

3°

设$f(t)$是某随机变量ξ的特征函数，则有

1° $|f(t)| \le f(0) = 1$。

2° 共轭对称性：$f(-t) = \overline{f(t)}$。

3° $f(t)$在$t \in (-\infty, \infty)$上一致连续。

设$f(t)$是某随机变量ξ的特征函数，则有
1° $|f(t)| \leq f(0) = 1$。
2° 共轭对称性：$f(-t) = \overline{f(t)}$。
3° $f(t)$在$t \in (-\infty, \infty)$上一致连续。
最后，对任何实数a, b，随机变量$a + b\xi$的特征函数

$$f_{a+b\xi}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it(a+b\xi)}\right) =$$

设$f(t)$是某随机变量ξ的特征函数，则有

1° $|f(t)| \le f(0) = 1$。

2° 共轭对称性：$f(-t) = \overline{f(t)}$。

3° $f(t)$在$t \in (-\infty, \infty)$上一致连续。

最后，对任何实数a, b，随机变量$a + b\xi$的特征函数

$$f_{a+b\xi}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it(a+b\xi)}\right) = e^{iat}\mathbb{E}\left(e^{i(tb)\xi}\right)$$

注意到$\xi = a + \sigma\eta$得

$$f_\xi(t) = e^{iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

注意到$\xi = a + \sigma\eta$得

$$f_\xi(t) = e^{iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

随机变量的矩与特征函数:

注意到$\xi = a + \sigma\eta$得

$$f_\xi(t) = e^{iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

随机变量的矩与特征函数：

设随机变量ξ的k阶原点矩有限，则其特征函数k 阶可微，且有

$$f^{(k)}(t) = \mathbb{E}\Big((i\xi)^k e^{it\xi}\Big)$$

注意到$\xi = a + \sigma\eta$得

$$f_\xi(t) = e^{iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

随机变量的矩与特征函数：

设随机变量ξ的k阶原点矩有限，则其特征函数k 阶可微，且有

$$f^{(k)}(t) = \mathbb{E}\big((i\xi)^k e^{it\xi}\big)$$

这意味着可以用特征函数来计算原点矩与中心矩，当然也可以帮助计算均值与方差。例如

$$m_k = i^{-k} f^{(k)}(0)$$

独立随机变量和的特征函数：

注意到$\xi = a + \sigma\eta$得

$$f_\xi(t) = e^{iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

随机变量的矩与特征函数：
设随机变量ξ的k阶原点矩有限，则其特征函数k 阶可微，且有

$$f^{(k)}(t) = \mathbb{E}\big((i\xi)^k e^{it\xi}\big)$$

这意味着可以用特征函数来计算原点矩与中心矩，当然也可以帮助计算均值与方差。例如

$$m_k = i^{-k} f^{(k)}(0)$$

独立随机变量和的特征函数：
设随机变量ξ_1与ξ_2相互独立，则它们之和的特征函数等于各自特征函数之积，即有

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = f_{\xi_1}(t) f_{\xi_2}(t)$$

求二项分布$B(n,p)$的特征函数。

求二项分布$B(n,p)$的特征函数。
取相互独立同分布的随机变量$\xi_1,\cdots,\xi_n$，使得$\xi_1 \sim B(1,p)$。则

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j \sim B(n,p)$$

求二项分布$B(n,p)$的特征函数。

取相互独立同分布的随机变量$\xi_1,\cdots,\xi_n$，使得$\xi_1\sim B(1,p)$。则

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_j\sim B(n,p)$$

注意到ξ_1的特征函数为$q+pe^{it}$，可得二项分布的特征函数为

$$f(t)=\left(q+pe^{it}\right)^n$$