概 率 论 基 础

张 新 生

Email: xszhang@fudan.edu.cn

复旦大学

May 27, 2011

教学内容

基本要求与成绩评定

1. 基本要求:
   概念、定理、例题、解题的基本技巧及应用基本理论解决实际问题的能力;
   课前预习、认真听课、课后复习、作业独立完成
2. 成绩评定:考勤:10%、作业:10%、期中:20%、期末:60%
3. 参考书:
   - 《概率论基础及其应用》,王梓坤著,科学出版社,1976 年版。
   - 《数理统计引论》,陈希儒著,科学出版社,1981年版。
   - 《概率论与数理统计》,李贤平、沈崇圣、陈子毅编著,复旦大学出版社。2003年版。
   - 《概率论及其应用》(上、下)Feller。
   - 《概率论与数理统计基础》周概容译。

研究对象与研究内容

- 研究对象：随机现象
- 研究内容：随机现象的数量规律性
- 确定性现象– 在一定条件下必然发生（出现）某一结果的现象称为确定性现象。
  每天早晨太阳从东方升起;
  水在标准大气压下加温到100^0C沸腾;
- 随机现象– 每次试验前不能预言出现什么结果，某一结果的出现有一定的偶然性。
  掷一枚硬币，正面朝上？反面朝上?
  某种型号电视机的寿命;

随机现象的特点：1. 结果不止一个; 2. 事先不知道哪一个会出现.

- 随机事件的频率稳定性：
- 频率：对于随机事件A，若在N次试验中出现了n次，则称F(A)=n/N 为事件A在N次试验中出现的频率。
- 统计规律性：随机事件的频率常在某个固定的常数附近摆动。
- 概率：对于随机事件A，客观上有一个数表示了它在一次试验中发生可能性的大小。概率就是频率的稳定值。

几个例子

- 例1:（生日问题）众所周知，如果有366个人则必定至少有两个人的生日在同一天。考虑如下问题：假设有$n(n < 366)$个人，问这n个人中至少有两个人的生日在同一天的可能性是多少？
- 例2：一池塘中有鱼若干条，采用何种方法可以快捷的估算出鱼的数目？
- 例3：在信封A与B内装有一定数量的人民币，已知其中之一的钱数是另外钱数的两倍。你随机的抽取一个信封，比如是A，现在给你一次调换的机会，问你换还是不换？

几个例子

- 例4(玛丽莲问题The Monty Hall Problem)：在三扇门后面分别藏有两只羊和一辆轿车。参与游戏的参与者可以先按自己的意愿选择一扇门，而游戏的操纵者则打开另外两扇门中的一扇门发现有羊，此时游戏的参与者还有一次重新选择的机会，即可以选择另外一扇未被打开的门。问游戏的参与者应该不应该重新选择？为什么？
- 例5：（血液检查中的经济学问题）：二战期间，必须征募很多人到部队，要检查申请者中某种罕见的疾病需要对每个人进行血液检查，如何保证”有问题的”会被查出，而检验次数尽可能的少？
- 例6：（敏感性问题的调查）如何设计一种调查方法，使被调查者正确回答被调查的敏感问题？（如你是否是HIV的病毒携带者等问题）。

- 例7：机票的超售问题。一架有N座的飞机，如预售N张票，到起飞时如有顾客因故不能到来，则会留下空的座位而影响航空公司的收入。解决问题的办法是预售$C(>N)$张票，问题是如何确定C。
- 例8：上海市餐饮业发票抽奖问题。

概率论的发展简史

- 概率的概念起源于中世纪以来的欧洲流行的用骰子赌博，一般把1654年作为概率论诞生的时间。在这个概率论的草创阶段，最重要的里程碑是伯努利的著作《推测术》。
- 早期对概率论作出重要贡献的科学家有伯努利、拉普拉斯（Laplace）、泊松（Poisson）和高斯（Gauss）。
- 1933年苏联数学家柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）完成了概率论的公理体系，使概率论与数理统计成为数学的一个分支。

概率论的概念和方法是数理统计学的理论基础

目前概率论中几个重要的研究领域：

极限定理（Limit Theorem)、大偏差(Large Deviation）、Markov过程、鞅(Martingale)、随机分析（Stochastic Analysis）、数理金融（Mathematics Finance）、时间序列（Time Series）：（ARMA模型、ARCH模型、GARCH模型）

概率论与数理统计的应用

概率统计理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中。目前最热门的两个领域：

- 金融数据分析
- 生命科学中的数据分析

1. 什么是样本空间

1. 什么是样本空间

- 对某事物特征进行观察, 统称试验.若它有如下特点,则称为随机试验,用E表示
  (i) 试验结果不止一个,但能明确所有的结果;
  (ii) 试验前不能预知出现哪种结果.

1. 什么是样本空间

- 对某事物特征进行观察, 统称试验.若它有如下特点,则称为随机试验,用E表示
  （i）试验结果不止一个,但能明确所有的结果;
  （ii）试验前不能预知出现哪种结果.
- 样本空间—
  随机试验E 所有可能的结果。组成的集合称为样本空间记为Ω

- 对某事物特征进行观察, 统称试验.若它有如下特点,则称为随机试验,用E表示
  （i）试验结果不止一个,但能明确所有的结果;
  （ii）试验前不能预知出现哪种结果.
- 样本空间—
  随机试验E 所有可能的结果。组成的集合称为样本空间记为Ω
- 样本空间的元素, 即E的直接结果, 称为: 样本点(基本事件).常记为ω,$\Omega = \{\omega\}$

[样本空间]:

E_1:投一枚硬币3次，观察正面出现的次数
$\Omega_1 = \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow$有限样本空间

E_2:观察总机每天接到的电话次数
$\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, ...N\}$

E_3:观察某地区每天的最高温度与最低温度
$\Omega_3 = \{(x, y) \mid T_1 \leq x \leq y \leq T_2\}$
其中T_1,T_2分别是该地区的最低与最高温度$\longrightarrow$无限样本空间

2. 什么是随机事件

2. 什么是随机事件

- 随机事件— Ω的子集, 记为A ,B ,…

2. 什么是随机事件

- 随机事件— Ω的子集, 记为A ,B ,…
- 基本事件— 仅由一个样本点组成的子集它是随机试验的直接结果.

2. 什么是随机事件

- 随机事件— Ω的子集, 记为A ,B ,…
- 基本事件— 仅由一个样本点组成的子集它是随机试验的直接结果.
- 随机事件发生— 组成随机事件的一个样本点发生

2. 什么是随机事件

- 随机事件— Ω的子集, 记为A ,B ,…
- 基本事件— 仅由一个样本点组成的子集它是随机试验的直接结果.
- 随机事件发生— 组成随机事件的一个样本点发生
- 必然事件— 全体样本点组成的事件,记为Ω, 每次试验必定发生的事件.

2. 什么是随机事件

- 随机事件— Ω的子集, 记为A ,B ,…
- 基本事件— 仅由一个样本点组成的子集它是随机试验的直接结果.
- 随机事件发生— 组成随机事件的一个样本点发生
- 必然事件— 全体样本点组成的事件,记为Ω, 每次试验必定发生的事件.
- 不可能事件— 不包含任何样本点的事件, 记为Φ ,每次试验必定不发生的事件.

3.文氏图

随机事件的关系和运算与集合的关系和运算相同.

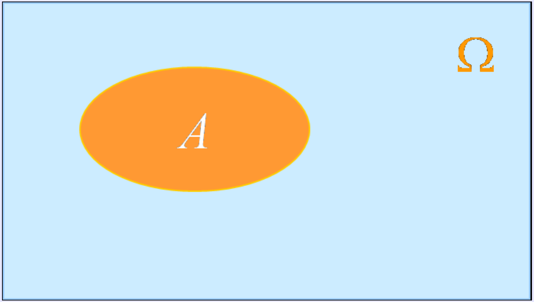


Figure: Venn diagram

4.事件的包含与相等

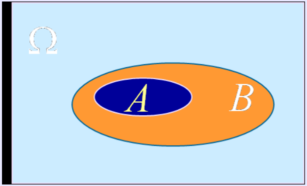


Figure: Venn diagram

- $A \subset B$—A包含于B
  $\Longleftrightarrow$事件A发生导致事件B发生

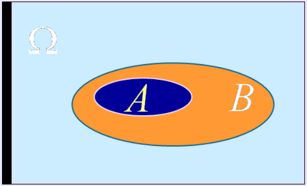


Figure: Venn diagram

4.事件的包含与相等

- $A \subset B$—A包含于B
  $\Longleftrightarrow$事件A发生导致事件B发生
- 事件的相等—$A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ 且$B \subset A$

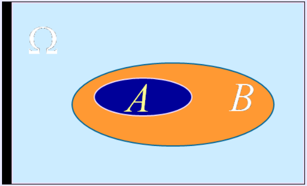


Figure: Venn diagram

5.事件的并(和)

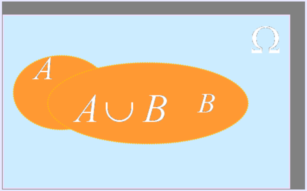


Figure: Venn diagram

5.事件的并(和)

- $A \cup B$ 或$A+B$—A与B的和事件
  $A \cup B$发生$\Longleftrightarrow$事件A与事件B至少有一个发生

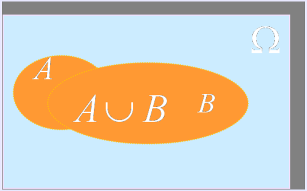


Figure: Venn diagram

5.事件的并(和)

- $A \cup B$ 或$A + B$—A与B的和事件
  $A \cup B$发生$\Longleftrightarrow$事件A与事件B至少有一个发生
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$的和事件— $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

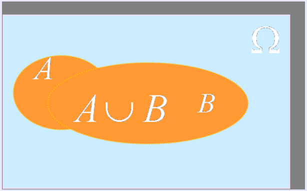


Figure: Venn diagram

5.事件的并(和)

- $A \cup B$ 或$A + B$—A与B的和事件
  $A \cup B$发生$\Longleftrightarrow$事件A与事件B至少有一个发生
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$的和事件— $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$的和事件—$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

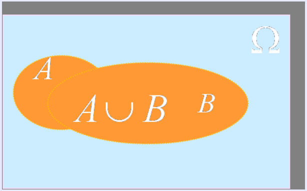


Figure: Venn diagram

6.事件的交(积)

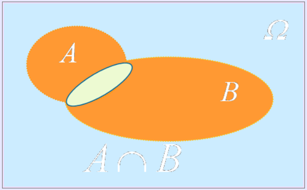


Figure: Venn diagram

6.事件的交(积)

- $A \cap B$ 或AB—A与B的积事件
  $A \cap B$发生$\Longleftrightarrow$事件A与事件B同时发生

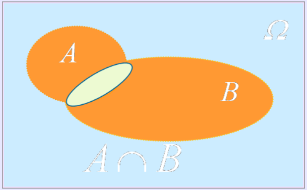


Figure: Venn diagram

6.事件的交(积)

- $A \cap B$ 或 AB—A与B的积事件
  $A \cap B$发生$\Longleftrightarrow$事件A与事件B同时发生
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$的积事件—$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

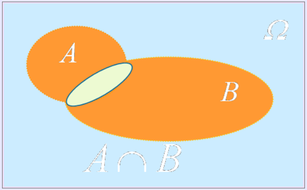


Figure: Venn diagram

6.事件的交(积)

- $A \cap B$ 或 AB—A与B的积事件
  $A \cap B$发生$\Longleftrightarrow$事件A与事件B同时发生
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$的积事件—$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$的积事件—$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

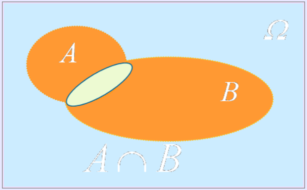


Figure: Venn diagram

7.事件的差

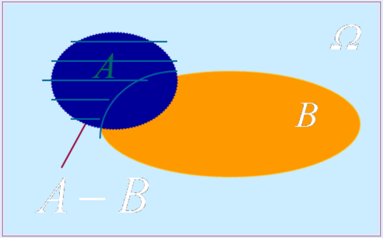


Figure: Venn diagram

7.事件的差

- $A-B$ 或 $A\bar{B}$—A与B的差事件
  $A-B$发生$\Longleftrightarrow$事件A发生，但事件B不发生

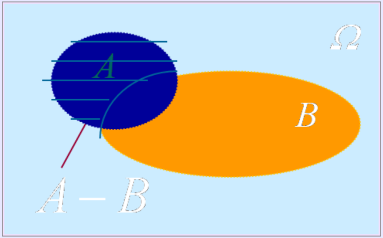


Figure: Venn diagram

7.事件的互斥

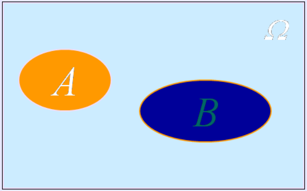


Figure: Venn diagram

7.事件的互斥

- $AB=\emptyset$—A与B互斥$\Longleftrightarrow A,B$不可能同时发生

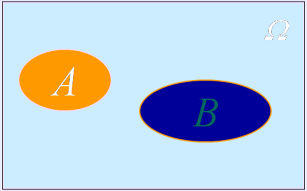


Figure: Venn diagram

7.事件的互斥

- $AB = \emptyset$—A与B互斥$\Longleftrightarrow A$,B不可能同时发生
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$两两互斥
  $\Longleftrightarrow A_iA_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, n$

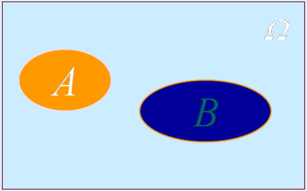


Figure: Venn diagram

7.事件的互斥

- $AB=\emptyset$—A与B互斥$\Longleftrightarrow A,B$不可能同时发生
- $A_1,A_2,\ldots,A_n$两两互斥 $\Longleftrightarrow A_iA_j=\emptyset, i\neq j, i,j=1,2,\ldots,n$
- $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$ 两两互斥 $\Longleftrightarrow A_iA_j=\emptyset, i\neq j, i,j=1,2,\ldots$

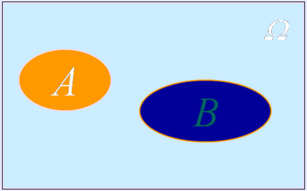


Figure: Venn diagram

8.事件的对立

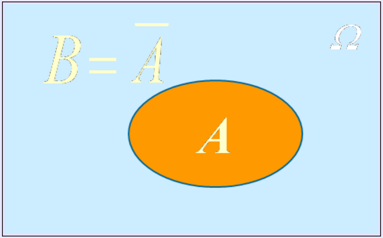


Figure: Venn diagram

8.事件的对立

- $AB=\emptyset$, $A\cup B=\Omega$—A与B为相互对立的两个事件 $\Longleftrightarrow$每次试验A，B有且只有一个发生，称B为A的对立事件（逆事件），记为：$B=\bar{A}$

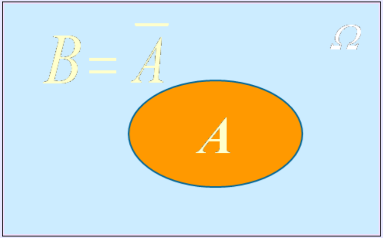


Figure: Venn diagram

8.事件的对立

- $AB=\emptyset$, $A\cup B=\Omega$—A与B为相互对立的两个事件 $\Longleftrightarrow$每次试验A，B有且只有一个发生，称B为A的对立事件（逆事件），记为：$B=\bar{A}$
- 注意："A与B相互独立与"A与B" 互斥是不同的概念。

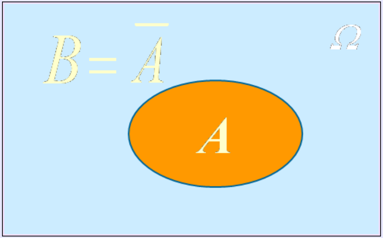


Figure: Venn diagram

若$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互斥，且$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$
则称$A_1, A_2, \ldots, A_n$为完备事件组，或称$A_1, A_2, \ldots, A_n$为Ω的一个划分。

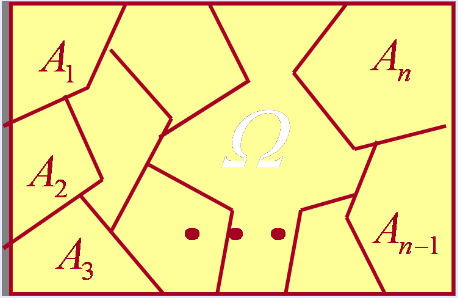


Figure: Venn diagram

10.常用集合运算等式

Figure: Venn diagram

Figure: Venn diagram

- $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$

10.常用集合运算等式

Figure: Venn diagram

- $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$
- $A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$

Figure: Venn diagram

- $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$
- $A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup (AB) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A \qquad \bar{\bar{A}} = A$

10.常用集合运算等式

Figure: Venn diagram

- $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$
- $A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup (AB) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A \qquad \bar{\bar{A}} = A$
- $A \cup A = A \qquad A \cap A = A$

10.常用集合运算等式

Figure: Venn diagram

- $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$
- $A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup (AB) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A \qquad \bar{\bar{A}} = A$
- $A \cup A = A \qquad A \cap A = A$
- $A - B = A\bar{B} = A - (AB)$

11.事件的运算法则

- 交换律: $A \cup B = B \cup A \quad AB = BA$

- 交换律: $A \cup B = B \cup A \quad AB = BA$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (AB)C = A(BC)$

11.事件的运算法则

- 交换律: $A \cup B = B \cup A \quad AB = BA$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (AB)C = A(BC)$
- 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$

11.事件的运算法则

- 交换律: $A\cup B=B\cup A \quad AB=BA$
- 结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \quad (AB)C=A(BC)$
- 分配律: $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C) A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$
- 对偶律: $\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B} \quad \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B} \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i$

例1.2：试用A，B,C表示下列事件：

1 A发生; A

2 仅A发生； $A\bar{B}\bar{C}$

3 恰有一个发生； $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$

4 至少有一个发生；$A\cup B\cup C$

5 至多有一个发生;$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$

6 都不发生;$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

7 不都发生;$\bar{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

8 至少有两个发生； $AB\cup BC\cup AC$

12. 古典概率模型的定义与计算

设随机试验E具有下列特点:

1.基本事件的个数有限

2.每个基本事件的发生是等可能

则称E 为古典概型

古典概型中概率的定义与计算: 记n=Ω中包含的基本事件总数k =组成A的基本事件个数则:

$$P(A) = k/n$$

12.生日问题

众所周知，如果有366个人则必定至少有两个人的生日在同一天。考虑如下问题：假设有n $(n < 366)$个人，问这n个人中至少有两个人的生日在同一天的可能性是多少？

解:
随机试验：逐次记录这n个人的生日。样本空间：

$$\Omega = \{(i_1, i_2, \ldots, i_n), 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots i_n \leq 365\}$$

事件A (这n个人中至少有两个人的生日在同一天) $P_n = P($至少两人生日相同$) = 1 - \frac{365!}{365^n (365-n)!}$

$$P_{20} = 0.4058, P_{30} = 0.6963, P_{50} = 0.9651, P_{60} = 0.9922$$

加法原理： 完成一件事情有n 类方法，第i 类方法中有m_i种具体的方法，则完成这件事情共有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i$$

种不同的方法。

乘法原理： 完成一件事情有n 个步骤，第i 个步骤中有m_i种具体的方法，则完成这件事情共有

$$\prod_{i=1}^{n} m_i$$

种不同的方法。

设有n个球，将其放入N个盒子中，按下列方式放球$(n \leq N)$:
(I) 球是有区别的，每盒中放球数不限;

(II) 球是有区别的，每盒中放球数不超过1个;

(III) 球是无区别的，每盒中放球数不限;

(IV) 球是无区别的，每盒中放球数不超过1个;

求每一种方式中各有多少种放法?

设有k个不同的球，每个球等可能地落入N个盒子中$(k \le N)$，设每个盒子容球数无限，球下列事件的概率

(1) 某指定的k 个盒子中各有一球;

(2) 某指定的一个盒子恰有m个球$(m \le k)$;

(3) 某指定的一个盒子没有球;

(4) 恰有k 个盒子中各有一球;

(5) 至少有两个球在同一盒子中;

(6) 每个盒子至多有一个球;

14. 例1.3(解)

$$P(A_1) = \frac{m_{A_1}}{n} = \frac{k!}{N^k}$$

$$P(A_2) = \frac{C_k^m (N-1)^{(k-m)}}{N^k}$$

$$P(A_3) = \frac{(N-1)^k}{N^k}$$

$$P(A_4) = \frac{C_N^k k!}{N^k}$$

$$P(A_5) = \frac{N^k - C_N^k k!}{N^k}, P(A_6) = P(A_4)$$

[例1.4]：一列火车有n节车厢，有$K(K \geq n)$个乘客上火车，并随机的选择车厢。求每节车厢内至少有一名乘客的概率。

[例1.5]：一口袋中装有a只黑球b只白球，现在随机地一次一次不放回摸球，求第$k(k \leq a+b)$次摸到黑球的概率

问题： N个产品，其中M个不合格品、$N-M$个合格品，从中有放回及不放回任取n个，则此n个产品中有m个不合格品的概率为多少?

解：

有放回抽样：

$$\binom{n}{m}\frac{M^m(N-M)^{n-m}}{N^n}=\binom{n}{m}\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-m}$$

$m=0,1,2,\ldots\ldots,n$ (二项分布)

不放回抽样：

$$\frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

$n\leq N, m\leq M, (n-m)\leq(N-M)$ (超几何分布).

从直观上看，当产品总数很大而抽样较少时，采取两种抽样的结果应该差别不大.

应用问题一：池塘中鱼的估计问题

P31 例7

应用问题二：彩票中奖问题——幸运35选7

★ 购买：从01 . . . 35中选7个号码。

★ 开奖：7个基本号码，1个特殊号码。

★ 中将规则：

1) 7个基本号码;

2) 6个基本号码+ 1个特殊号码;

3) 6个基本号码;

4) 5个基本号码+ 1个特殊号码;

5) 5个基本号码;

6) 4个基本号码+1个特殊号码;

7) 4个基本号码，或3个基本号码+ 1个特殊号码。

16. 解

Ω 中所含样本点个数: C_{35}^{7}

将35个号分成三类: 7个基本号码、 1个特殊号码、 27个无用号码

记p_i为中i等奖的概率, 利用抽样模型得到:

$$p_1 = \frac{C_7^7 C_1^0 C_{27}^0}{C_{35}^7}, \qquad p_2 = \frac{C_7^6 C_1^1 C_{27}^0}{C_{35}^7}.$$

各中奖概率具体如下:

$$p_1 = \frac{1}{6724520}, \quad p_2 = \frac{7}{6724520}, \quad p_3 = \frac{189}{6724520}, \quad p_4 = \frac{567}{6724520},$$

$$p_5 = \frac{7371}{6724520}, \; p_6 = \frac{12285}{6724520} \; p_7 = \frac{204750}{6724520}$$

不中奖概率为:

$$p_0 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6 - p_7 = \frac{6499350}{6724520} = 0.966515.$$

17. 分组问题

例1.6：在16人进行的国际乒乓球比赛中，有一名德国人，三名中国人，比赛分四组进行，每组四名选手，假定分组是随机的。求：（1）三名中国人分在三个组中的概率；（2）三名中国人和一名德国人分在同一组的概率。

18. 古典概率的基本性质

(1) 对任何事件A，$P(A) > 0$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

(3) 有限可加性: 对随机事件$A_1, \cdots, A_n$，若两两互不相容（$A_i \bigcap A_j = \emptyset, i \neq j$），则

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

19. 几何概型的定义与计算

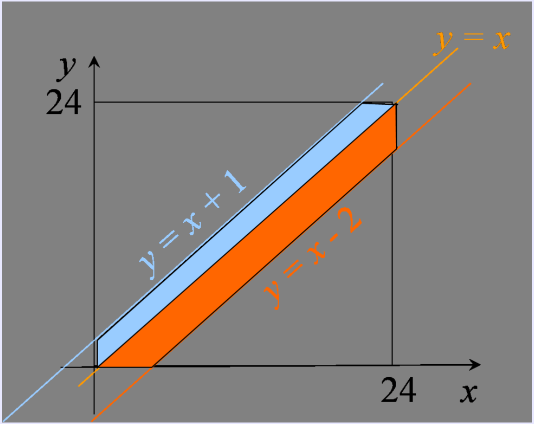
引例: 某人的表停了，他打开收音机听电台报时，已知电台是整点报时的，问他等待报时的时间短于十分钟的概率

几何概型概率的计算公式： 设样本空间为有限区域Ω, 若样本点落入Ω内任何区域G 中的概率与区域G的测度成正比, 则样本点落入G内的概率为:

$$P = \frac{G\text{测度}}{\Omega\text{的测度}}$$

例1.7: 两船欲停同一码头, 两船在一昼夜内独立随机地到达码头. 若两船到达后需在码头停留的时间分别是1 小时与2 小时, 试求在一昼夜内，任一船到达时，需要等待空出码头的概率.

解： 设船1 到达码头的瞬时为x，$0 \le x < 24$，设船2 到达码头的瞬时为y，$0 \le y < 24$. 设事件A 表示任一船到达码头时需要等待空出码头



19. 例

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x < 24, 0 \le y < 24\}$$

$$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, 0 \le y - x \le 1, 0 \le x - y \le 2\}$$

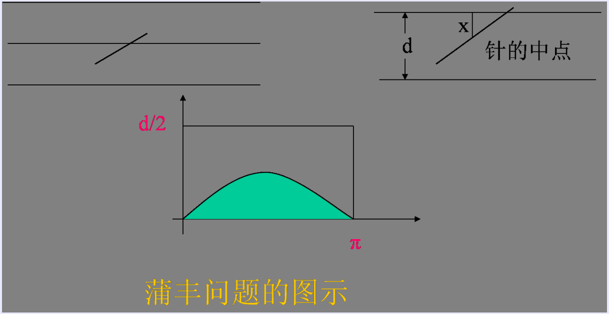
$$S_\Omega = 24^2 \qquad S_{\bar{A}} = \frac{1}{2}(23^2 + 22^2)$$

$$P(A) = 1 - \frac{S_{\bar{A}}}{S_\Omega} = 0.1207$$

蒲丰投针：

平面上画着一些平行线，线之间的距离都为d，向此平面任投一长度为$l(l < d)$的针，求此针与任一平行线相交的概率？

20. 蒲丰问题的图示



以x表示针的中点与最近一条平行线的距离，
又以φ表示针与此直线间的交角.易知：样本空间Ω满足:

$$0 \le x \le d/2; \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

Ω 形成$x-\varphi$平面上的一个矩形，其面积为：$S_\Omega = d(\pi/2)$.
$A =$ “针与平行线相交”的充要条件是:

$$x \le l/2 \sin(\varphi)$$

于是：$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\int_0^\pi l/2 \sin(\varphi) d\varphi}{d(\pi/2)} = \frac{2l}{d\pi}$

20. π的随机模拟

20. π的随机模拟

- 由蒲丰投针问题知：长为l 的针与平行线相交的概率为:$2l/d\pi$

20. π的随机模拟

- 由蒲丰投针问题知：长为l 的针与平行线相交的概率为:$2l/d\pi$
- 而实际去做N 次试验，得n 次针与平行线相交，则频率为:n/N.

20. π的随机模拟

- 由蒲丰投针问题知：长为l 的针与平行线相交的概率为:$2l/d\pi$
- 而实际去做N 次试验，得n 次针与平行线相交，则频率为:n/N.
- 用频率代替概率得:$\pi \approx 2lN/(dn)$

20. π的随机模拟

- 由蒲丰投针问题知：长为l 的针与平行线相交的概率为:$2l/d\pi$
- 而实际去做N 次试验，得n 次针与平行线相交，则频率为:n/N.
- 用频率代替概率得:$\pi \approx 2lN/(dn)$
- 历史上有一些著名的实验数据。

20. π的随机模拟

- 由蒲丰投针问题知：长为l 的针与平行线相交的概率为:$2l/d\pi$
- 而实际去做N 次试验，得n 次针与平行线相交，则频率为:n/N.
- 用频率代替概率得:$\pi \approx 2lN/(dn)$
- 历史上有一些著名的实验数据。
- 问题推广：平面上画有间隔为d的等距平行线，向平面任意投掷一个边长为a,b,c (均小于d)的三角形，三角形与平行线相交的概率？

21. 几何概型的基本性质

(1) 对任何事件A，$P(A) \geq 0$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

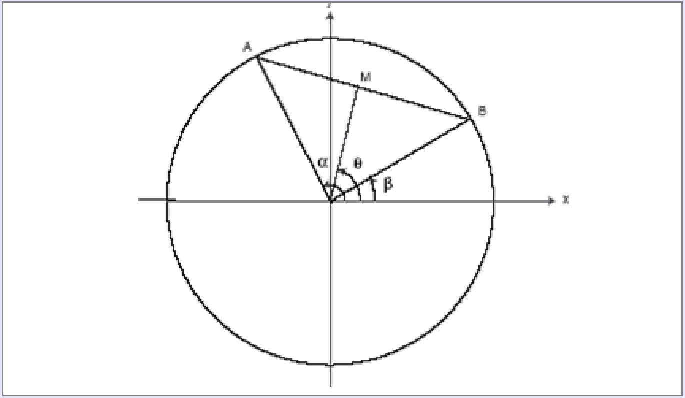
(3) 有限可加性

思考题：一个事件的概率等于零，这个事件一定是不可能事件吗？

21. 例

贝特朗（Bertrand）奇论：在半径为1的圆内随机的取一条弦，问其长超过该圆内接等边三角形的边长的概率等于多少？

22.对“随机地”三种不同的理解:



23. 对“随机地”的三种不同理解（续）

23. 对“随机地”的三种不同理解（续）

- 弦的两个端点A、B取极坐标$A(1,\alpha)$,$B(1,\beta)$ 可假定弦的一端固定，比如$B(0,\beta)$，此时弦长$L=\sqrt{2-2\cos\alpha}$ $L>\sqrt{3}$ 等价于$(2/3)\pi<\alpha<(4/3)\pi$ $p=[(4/3)\pi-(2/3)\pi]/[2\pi-0]=1/3.$

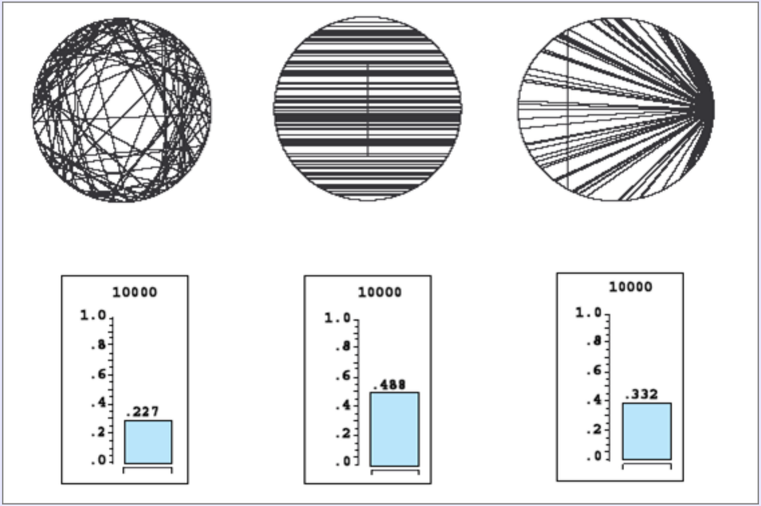
23. 对“随机地”的三种不同理解（续）

- 弦的两个端点A、B取极坐标$A(1,\alpha)$,$B(1,\beta)$ 可假定弦的一端固定，比如$B(0,\beta)$，此时弦长$L=\sqrt{2-2\cos\alpha}$ $L>\sqrt{3}$ 等价于$(2/3)\pi<\alpha<(4/3)\pi$ $p=[(4/3)\pi-(2/3)\pi]/[2\pi-0]=1/3.$
- 设任意一弦的中点极坐标为(γ,θ)弦在圆内的充分必要条件为：$-1\leq\gamma\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi$ 弦长：$L=2\sqrt{1-\theta^2}$, $L>\sqrt{3}$ 等价于$|\gamma|<1/2$ 所以$p=[1/2-(-1/2)]/[1-(-1)]=1/2.$

23. 对“随机地”的三种不同理解（续）

- 弦的两个端点A、B取极坐标$A(1,\alpha)$,$B(1,\beta)$ 可假定弦的一端固定，比如$B(0,\beta)$，此时弦长$L=\sqrt{2-2\cos\alpha}$ $L>\sqrt{3}$ 等价
于$(2/3)\pi<\alpha<(4/3)\pi$ $p=[(4/3)\pi-(2/3)\pi]/[2\pi-0]=1/3.$
- 设任意一弦的中点极坐标为(γ,θ)弦在圆内的充分必要条件为：$-1\leq\gamma\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi$ 弦长：$L=2\sqrt{1-\theta^2}$, $L>\sqrt{3}$ 等价于$|\gamma|<1/2$ 所以$p=[1/2-(-1/2)]/[1-(-1)]=1/2.$
- 设任意一弦的中点直角坐标为(x,y)，此弦在园内的充分必要条件为：$x^2+y^2\leq 1$,此时弦
长：$L=2\sqrt{1-(x^2+y^2)}$,$L>\sqrt{3}$ 等价于$x^2+y^2<1/4$,此时，$p=\frac{[(1/4)\pi]}{1/\pi}=1/4.$

23. 随机地的三种不同理解（续）



随机事件的公理化定义

设Ω是随机试验E 的样本空间，$\mathcal{F}$是Ω的某些子集的集合，即$\mathcal{F}=\{A, A\subset\Omega\}$若$\mathcal{F}$满足:

随机事件的公理化定义

设Ω是随机试验E 的样本空间，$\mathcal{F}$是Ω的某些子集的集合，即$\mathcal{F}=\{A, A\subset\Omega\}$若$\mathcal{F}$满足:

- $\Omega\in\mathcal{F}$;

随机事件的公理化定义

设Ω是随机试验E 的样本空间，$\mathcal{F}$是Ω的某些子集的集合，即$\mathcal{F} = \{A, A \subset \Omega\}$若$\mathcal{F}$满足:

- $\Omega \in \mathcal{F}$;
- 若$A \in \mathcal{F}$ 则: $\bar{A} \in \mathcal{F}$

随机事件的公理化定义

设Ω是随机试验E 的样本空间，$\mathcal{F}$是Ω的某些子集的集合，即$\mathcal{F} = \{A, A \subset \Omega\}$若$\mathcal{F}$满足：

- $\Omega \in \mathcal{F}$;
- 若$A \in \mathcal{F}$ 则：$\bar{A} \in \mathcal{F}$
- 若$A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \subset \mathcal{F}$,则$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
  则$\mathcal{F}$中的任意元素A，称为随机事件，$\mathcal{F}$称为事件域。

概率的公理化(续)

概率的公理化定义

设Ω是随机试验E 的样本空间，P是$\mathcal{F}$到$[0,1]$的一个映射，满足:

概率的公理化定义

设Ω是随机试验E 的样本空间，P是$\mathcal{F}$到$[0,1]$的一个映射，满足:

- 非负性公理:　$P(A) \geq 0$;

概率的公理化定义

设Ω是随机试验E 的样本空间，P是$\mathcal{F}$到$[0,1]$的一个映射，满足:

- 非负性公理: $P(A) \geq 0$;
- 正则性公理: $P(\Omega) = 1$;

概率的公理化(续)

概率的公理化定义

设Ω是随机试验E 的样本空间，P是$\mathcal{F}$到$[0,1]$的一个映射，满足:

- 非负性公理: $P(A) \geq 0$;
- 正则性公理: $P(\Omega) = 1$;
- 可列可加性公理: 若$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots$,互不相容,
  则$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
  则P就是定义在$(\Omega, \mathcal{F})$上的一个概率。

- 古典概型的概率空间

概率空间

- 古典概型的概率空间
- 有限概率空间

概率空间

- 古典概型的概率空间
- 有限概率空间
- 离散概率空间

概率空间

- 古典概型的概率空间
- 有限概率空间
- 离散概率空间
- 几何概型的概率空间

概率性质及其应用

- $P(\emptyset)=0$,
  注意: 逆不一定成立;

概率性质及其应用

- $P(\emptyset)=0$,
  注意: 逆不一定成立;
- 概率有有限可加性:
  若$A\cap B=\emptyset$,则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$,
  可推广到n 个互不相容事件;

- $P(\emptyset) = 0$,
  注意: 逆不一定成立;
- 概率有有限可加性:
  若$A \cap B = \emptyset$,则$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
  可推广到n 个互不相容事件;
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

- $P(\emptyset) = 0$,
  注意：逆不一定成立;
- 概率有有限可加性:
  若$A \cap B = \emptyset$,则$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
  可推广到n 个互不相容事件;
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- 对任意两个事件A, B, 有:$P(B - A) = P(B) - P(AB)$;

概率性质及其应用

- $P(\emptyset)=0$,
  注意：逆不一定成立；
- 概率有有限可加性：
  若$A\cap B=\emptyset$,则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$,
  可推广到n 个互不相容事件；
- $P(\bar{A})=1-P(A)$;
- 对任意两个事件A, B, 有:$P(B-A)=P(B)-P(AB)$;
- 广义加法公式；$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i,j\le n}P(A_iA_j)+\sum P(A_iA_jA_k)+\cdots+$$

$(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$;

- 布尔不等式（次可加性）；$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$;

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

- 布尔不等式（次可加性）；$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$;

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\le \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

- Bonferroni不等式：$P(AB)\ge P(A)+P(B)-1$,

$$P(A_1\cdots A_n)\ge \sum_{i=1}^{n} P(A_i)-(n-1)$$

.

事件序列的极限

- 若事件序列$\{F_n\}$满足：$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \dots$
  则称$\{F_n\}$为单调不减事件序列，其极限事件为：

$$\lim_{n\to +\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$

事件序列的极限

- 若事件序列$\{F_n\}$满足：$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \dots$
  则称$\{F_n\}$为单调不减事件序列，其极限事件为：

$$\lim_{n\to+\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$

- 若事件序列$\{F_n\}$满足：$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \dots$
  则称$\{F_n\}$为单调不增事件序列，其极限事件为：

$$\lim_{n\to+\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$$

集合函数的连续性

设$P(\cdot)$是一个集函数，

设P(·)是一个集函数,

- 若任对单调不减集合序列 $\{F_n\}$,有

$$P(\lim_{n\to+\infty} F_n) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$$

则称P(·)是下连续的.

设P(·)是一个集函数，

- 若任对单调不减集合序列 $\{F_n\}$,有

$$P(\lim_{n\to+\infty} F_n) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$$

则称P(·)是下连续的.

- 若任对单调不增集合序列$\{F_n\}$,有

$$P(\lim_{n\to+\infty} F_n) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$$

则称P(·)是上连续的.

概率的连续与可列可加

- **性质：** 若P(·)是事件域$\mathcal{F}$上的一个概率，则P(·) 既是下连续的，又是上连续的

概率的连续与可列可加

- **性质**：若$P(\cdot)$是事件域$\mathcal{F}$上的一个概率，则$P(\cdot)$既是下连续的，又是上连续的

- **定理**：若$P(\cdot)$是事件域$\mathcal{F}$上满足：非负、正则的集函数，则$P(\cdot)$有可列可加性的充要条件是它具有有限可加性和下连续性.

4

概率性质的应用

概率性质的应用

- **例1.8**: 某城市有N辆卡车，车号从1到N，有一个外地人到该城去，把遇到的n辆车子的牌号记下（可能重复），求记下的最大号码正好为k的概率。
- **解**：设A_k表示随机事件“记下的最大号码正好为k”，

概率性质的应用

- **例1.8**: 某城市有N辆卡车，车号从1到N，有一个外地人到该城去，把遇到的n辆车子的牌号记下（可能重复），求记下的最大号码正好为k的概率。
- **解**： 设A_k表示随机事件“记下的最大号码正好为k”，
- B_k表示随机事件“记下的最大号码不超过k”，则:

概率性质的应用

- **例**1.8: 某城市有N辆卡车，车号从1到N，有一个外地人到该城去，把遇到的n辆车子的牌号记下（可能重复），求记下的最大号码正好为k的概率。
- **解**： 设A_k表示随机事件“记下的最大号码正好为k”，
- B_k表示随机事件“记下的最大号码不超过k”，则:
- $P(B_k) = \frac{k^n}{N^n}$

- **例1.8:** 某城市有N辆卡车，车号从1到N，有一个外地人到该城去，把遇到的n辆车子的牌号记下（可能重复），求记下的最大号码正好为k的概率。
- **解：** 设A_k表示随机事件“记下的最大号码正好为k”，
- B_k表示随机事件“记下的最大号码不超过k”，则：
- $P(B_k) = \frac{k^n}{N^n}$
- 注意到：$A_k = B_k - B_{k-1}$，且$B_{k-1} \subset B_k$

概率性质的应用

- **例1.8:** 某城市有N辆卡车，车号从1到N，有一个外地人到该城去，把遇到的n辆车子的牌号记下（可能重复），求记下的最大号码正好为k的概率。
- **解：** 设A_k表示随机事件“记下的最大号码正好为k”，
- B_k表示随机事件“记下的最大号码不超过k”，则：
- $P(B_k) = \frac{k^n}{N^n}$
- 注意到：$A_k = B_k - B_{k-1}$，且$B_{k-1} \subset B_k$
- 故：$P(A_k) = P(B_k - B_{k-1}) = P(B_k) - P(B_{k-1}) = \frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$.

概率性质的应用

- 例1.9：从1，2，⋯⋯，9中返回取n次，求取出的n个数的乘积能被10整除的概率.

- **例**1.9：从1，2，……，9中返回取n次，求取出的n个数的乘积能被10整除的概率.
- **解**： 因为“乘积能被10整除”意味着：“取到过5”(记为A) 且“取到过偶数”(记为B)，

概率性质的应用

- **例**1.9: 从1, 2, ……, 9中返回取n次，求取出的n个数的乘积能被10整除的概率.
- **解**： 因为“乘积能被10整除”意味着： “取到过5”(记为A) 且“取到过偶数”(记为B),
- 因此所求概率为$P(AB)$.

概率性质的应用

- **例1.9**: 从1, 2, ……, 9中返回取n次，求取出的n个数的乘积能被10整除的概率.
- **解**: 因为“乘积能被10整除”意味着: “取到过5”(记为A) 且“取到过偶数”(记为B),
- 因此所求概率为$P(AB)$.
- 利用对立事件公式、德莫根对偶律和加法公式:

- 例1.9: 从1, 2, ……, 9中返回取n次，求取出的n个数的乘积能被10整除的概率.
- 解： 因为“乘积能被10整除”意味着： “取到过5”(记为A) 且“取到过偶数”(记为B),
- 因此所求概率为$P(AB)$.
- 利用对立事件公式、德莫根对偶律和加法公式:
- $$P(AB) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{B})$$

- **例**1.9: 从1, 2, ……, 9中返回取n次，求取出的n个数的乘积能被10整除的概率.
- **解**: 因为“乘积能被10整除”意味着: “取到过5”(记为A)且“取到过偶数”(记为B),
- 因此所求概率为$P(AB)$.
- 利用对立事件公式、德莫根对偶律和加法公式:
- $$P(AB) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{B})$$
- $$P(AB) = 1 - 8^n/9^n - 5^n/9^n + 4^n/9^n$$

例1.9（续）：从0,1,$\cdots$,9这10个数字中不放回地任取n个，求n个数之积能被10整除的概率。

解：

$$\mathbb{P}(AB) = 1 - \frac{\binom{8}{n} + \binom{5}{n} - \binom{4}{n}}{\binom{10}{n}}$$

概率性质的应用

- **例1.10**: 某人写好n封信，又写好n只信封，然后，将每封信随机地放入n只信封中，求至少有一封信放对的概率？
- **解**: 记$A_i=$"第i 封信与信封相符"，$i=1,2,\ldots,n$.

概率性质的应用

- **例1.10**: 某人写好n封信，又写好n只信封，然后，将每封信随机地放入n只信封中，求至少有一封信放对的概率？
- **解**: 记$A_i =$ “第i 封信与信封相符”，$i = 1, 2, \ldots, n.$
- 要求的概率为：$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cdots \cup A_n)$

概率性质的应用

- **例1.10**: 某人写好n封信，又写好n只信封，然后，将每封信随机地放入n只信封中，求至少有一封信放对的概率？
- **解**: 记$A_i =$ “第i 封信与信封相符”，$i = 1, 2, \ldots, n$.
- 要求的概率为：$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cdots \cup A_n)$
- 用广加法公式:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum P(A_i A_j) + \sum P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

概率性质的应用

- **例1.10**: 某人写好n封信，又写好n只信封，然后，将每封信随机地放入n只信封中，求至少有一封信放对的概率?
- **解**: 记$A_i=$“第i 封信与信封相符”，$i=1,2,\ldots,n$.
- 要求的概率为：$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cdots\cup A_n)$
- 用广加法公式:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum P(A_iA_j)+\sum P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$$

- 易知$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}$, $\quad P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}$, $\quad \ldots$

概率性质的应用

- **例1.10:** 某人写好n封信，又写好n只信封，然后，将每封信随机地放入n只信封中，求至少有一封信放对的概率?
- **解**: 记$A_i =$ “第i 封信与信封相符”，$i = 1, 2, \ldots, n.$
- 要求的概率为：$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cdots \cup A_n)$
- 用广加法公式:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) + \cdots +$$

$$(-1)^{n-1} P(A_1A_2 \ldots A_n)$$

- 易知$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}, \quad P(A_iA_j) = \frac{(n-2)!}{n!}, \quad \ldots$
- $P(A_1A_2 \ldots \ldots A_n) = 1/n!;$

概率性质的应用

- **例1.10**: 某人写好n封信，又写好n只信封，然后，将每封信随机地放入n只信封中，求至少有一封信放对的概率?
- **解**: 记$A_i =$ “第i 封信与信封相符”，$i = 1, 2, \ldots, n.$
- 要求的概率为: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cdots \cup A_n)$
- 用广加法公式:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) + \cdots +$$

$$(-1)^{n-1} P(A_1A_2 \ldots A_n)$$

- 易知$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$, $P(A_iA_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$, $\ldots$
- $P(A_1A_2 \ldots \ldots A_n) = 1/n!;$
- 故

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - 1/2! + 1/3! + \ldots \cdots + (-1)^{n-1}/n!$$

概率性质的应用

- **例1.10**: 某人写好n封信，又写好n只信封，然后，将每封信随机地放入n只信封中，求至少有一封信放对的概率?
- **解**: 记$A_i=$ “第i 封信与信封相符”，$i=1,2,\ldots,n.$
- 要求的概率为: $P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cdots\cup A_n)$
- 用广加法公式:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum P(A_iA_j)+\sum P(A_iA_jA_k)+\cdots+$$

$$(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$$

- 易知$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}$, $\quad P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}$, $\quad\ldots$
- $P(A_1A_2\ldots\ldots A_n)=1/n!$;
- 故

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-1/2!+1/3!+\ldots\cdots+(-1)^{n-1}/n!$$

- $\rightarrow 1-e^{-1}$

例1.4（续）：一列火车有n节车厢，有$K(K \geq n)$个乘客上火车，并随机的选择车厢。求每节车厢内至少有一名乘客的概率。

第一章小结

- 概率论是研究随机现象的数量规律性的一门数学学科;

第一章小结

- 概率论是研究随机现象的数量规律性的一门数学学科;
- 事件与概率的描述性与公理化定义;

第一章小结

- 概率论是研究随机现象的数量规律性的一门数学学科;
- 事件与概率的描述性与公理化定义;
- 概率的基本性质及其应用;

第一章小结

- 概率论是研究随机现象的数量规律性的一门数学学科;
- 事件与概率的描述性与公理化定义;
- 概率的基本性质及其应用;
- 古典概型与几何概型中的概率计算。