概 率 论 基 础

张 新 生

Email: xszhang@fudan.edu.cn

复旦大学

October 11, 2010

教学内容

1 第三章 随机变量与分布函数

随机变量的背景

为什么要引进随机变量?

(1) 由第一、二章知我们研究的对象是随机事件的概率，由概率的公理化定义知，从数学上看，概率是定义在事件域上的集函数，这是一个新的，陌生的概念，是否可以将其与我们熟悉的点函数联系起来。

(2)在研究随机现象时，所关心的问题多与数值直接发生关系；可以借助于定义在样本空间上的某一函数表示。例如:

随机变量的背景

为什么要引进随机变量?

(1) 由第一、二章知我们研究的对象是随机事件的概率，由概率的公理化定义知，从数学上看，概率是定义在事件域上的集函数，这是一个新的，陌生的概念，是否可以将其与我们熟悉的点函数联系起来。

(2)在研究随机现象时，所关心的问题多与数值直接发生关系；可以借助于定义在样本空间上的某一函数表示。例如:

- 掷一颗骰子，出现的点数X: $1, 2, \ldots, 6$

随机变量的背景

为什么要引进随机变量?

(1) 由第一、二章知我们研究的对象是随机事件的概率，由概率的公理化定义知，从数学上看，概率是定义在事件域上的集函数，这是一个新的，陌生的概念，是否可以将其与我们熟悉的点函数联系起来。

(2)在研究随机现象时，所关心的问题多与数值直接发生关系；可以借助于定义在样本空间上的某一函数表示。例如:

- 掷一颗骰子，出现的点数X: $1, 2, \ldots, 6$
- n个产品中的不合格品个数Y： $0, 1, 2, \ldots, n$

随机变量的背景

为什么要引进随机变量?

(1) 由第一、二章知我们研究的对象是随机事件的概率，由概率的公理化定义知，从数学上看，概率是定义在事件域上的集函数，这是一个新的，陌生的概念，是否可以将其与我们熟悉的点函数联系起来。

(2)在研究随机现象时，所关心的问题多与数值直接发生关系；可以借助于定义在样本空间上的某一函数表示。例如:

- 掷一颗骰子，出现的点数X: $1, 2, \ldots, 6$
- n个产品中的不合格品个数Y： $0, 1, 2, \ldots, n$
- 某商场一天内来的顾客数Z： $0, 1, 2, \ldots \ldots$

随机变量的背景

为什么要引进随机变量?

(1) 由第一、二章知我们研究的对象是随机事件的概率，由概率的公理化定义知，从数学上看，概率是定义在事件域上的集函数，这是一个新的，陌生的概念，是否可以将其与我们熟悉的点函数联系起来。

(2)在研究随机现象时，所关心的问题多与数值直接发生关系；可以借助于定义在样本空间上的某一函数表示。例如:

- 掷一颗骰子，出现的点数X: $1, 2, \dots, 6$
- n个产品中的不合格品个数Y： $0, 1, 2, \dots, n$
- 某商场一天内来的顾客数Z： $0, 1, 2, \dots \dots$
- 某种型号电视机的寿命T： $[0, +\infty)$

随机变量的定义

设$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$为概率空间，$\xi=\xi(\omega)$为定义在$\Omega$上的实函数。若对于任何实数$x$，

$$\{\omega\in\Omega:\ \xi(\omega)<x\}\in\mathcal{F}$$

则称$\xi(\omega)$为**随机变量**；或称$\xi(\omega)$为$\mathcal{F}$可测函数。
随机变量$\xi(\omega)$是样本点ω的函数,其定义域为Ω,其值域为$R=(-\infty,+\infty)$。随机变量的定义仅与$\mathcal{F}$有关，与概率无关。同一样本空间可以定义不同的随机变量。

随机变量与随机事件

设X是定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的随机变量，
记：$\{\omega,\ X(\omega) < x\} = \{X < x\}$，
则$\{X \le x\}$，$\{X = x\}$，$\{a < X \le b\}$，$\{X > b\}$ 均为随机事件。

随机变量的性质

随机变量的性质

- 两个随机变量之和还是随机变量;

随机变量的性质

- 两个随机变量之和还是随机变量;
- 两个随机变量之积还是随机变量;

随机变量的性质

- 两个随机变量之和还是随机变量;
- 两个随机变量之积还是随机变量;
- f是一实函数（如连续函数），X是一随机变量，则$f(X)$仍是一随机变量。

随机变量的分布函数

设ξ为一个随机变量，对任意实数x，定义：

$$F_\xi(x) \triangleq \mathbb{P}(\xi < x) \triangleq \mathbb{P}(\xi \in (-\infty, x))$$

称F_ξ为ξ的**分布函数**，简称为**分布函数**。
分布函数F_ξ是实函数；有的书上把定义中的小于号改为小于等于号。

分布函数的性质

分布函数F具有如下的性质:

注:
（1）具有上面三条性质的实函数，必然是某一随机变量的分布函数。
（2）若定义$F(x) \triangleq \mathbb{P}(\xi \leq x)$，则分布函数右连续。

分布函数的性质

分布函数F具有如下的性质:

- 单调非降性: $\forall x_1 < x_2$, $F(x_1) \le F(x_2)$;

注:

（1）具有上面三条性质的实函数，必然是某一随机变量的分布函数。

（2）若定义$F(x) \triangleq \mathbb{P}(\xi \le x)$，则分布函数右连续。

分布函数的性质

分布函数F具有如下的性质:

- 单调非降性: $\forall x_1 < x_2$, $F(x_1) \leq F(x_2)$;
- 左连续性: $\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$;

注:
(1) 具有上面三条性质的实函数，必然是某一随机变量的分布函数。
(2) 若定义$F(x) \triangleq \mathbb{P}(\xi \leq x)$，则分布函数右连续。

分布函数的性质

分布函数F具有如下的性质:

- 单调非降性: $\forall x_1 < x_2, \; F(x_1) \le F(x_2)$;
- 左连续性: $\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$;
- 规范性:

$$F(-\infty) \triangleq \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$F(\infty) \triangleq \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

注:
（1）具有上面三条性质的实函数，必然是某一随机变量的分布函数。
（2）若定义$F(x) \triangleq \mathbb{P}(\xi \le x)$，则分布函数右连续。

证明

显然，$\forall x_1 < x_2$有

$$\{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\}$$

由概率的单调性得分布函数的单调性。其次，$\forall x_n \uparrow x_0$有

$$\{\xi < x_n\} \uparrow \bigcup_n \{\xi < x_n\} = \{\xi < x_0\}$$

由概率的下连续性得

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$$

即左连续性。
最后由$\{\xi < -n\} \downarrow \emptyset$，$\{\xi < n\} \uparrow \Omega$和概率的上下连续性可分别得

$$\lim_{n\to\infty} F(-n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} F(n) = 1$$

再由分布函数的单调性得规范性。

利用分布函数计算事件的概率

$$\mathbb{P}(\xi = x) = F(x+0) - F(x)$$

$$\mathbb{P}(\xi \leq x) = F(x+0)$$

$$\mathbb{P}(\xi > x) = 1 - F(x+0)$$

$$\mathbb{P}(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$$

离散型随机变量

（a）特征:若随机变量X 可能取值的个数为有限个或可列个，则称X 为离散随机变量.

（b）分布列

设离散随机变量X 的可能取值为:

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$$

称$p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, \ldots\ldots$为X 的分布列

分布列也可用表格形式表示:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

分布函数:

$$F(x) = \sum_{k: x_k < x} p_k, \forall x \in \mathbb{R}$$

布列的特征性质

(1) $p_i \geq 0,$ (非负性)

(2) $\sum_i p_i = 1.$ (正则性)

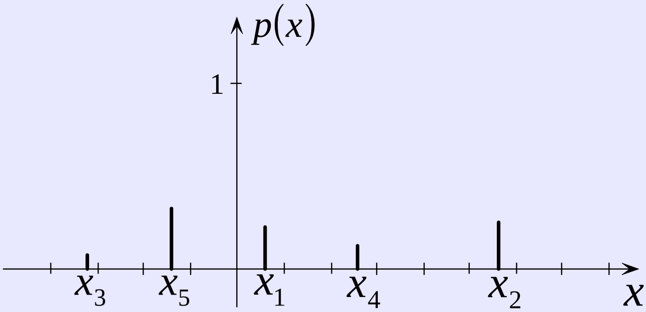
一个随机变量即描述了一个概率空间

求离散随机变量的分布列应注意:

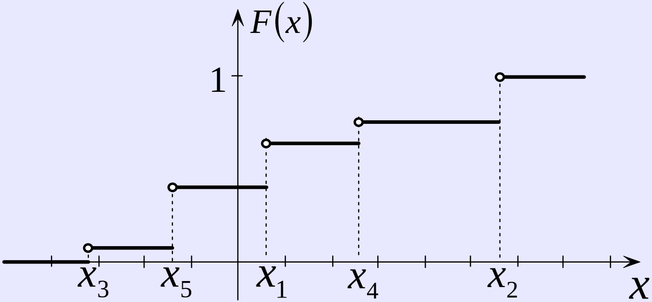
△ 确定随机变量的所有可能取值;

△ 计算每个取值点的概率.

分布列与分布函数的图示



分布列与分布函数的图示



分布列与分布函数的图示

分布列与分布函数的图示

- F(x)是递增的阶梯函数;

分布列与分布函数的图示

- F(x)是递增的阶梯函数;
- 其间断点均为左连续的;

分布列与分布函数的图示

- F(x)是递增的阶梯函数;
- 其间断点均为左连续的;
- 其间断点即为X的可能取值点;

分布列与分布函数的图示

- F(x)是递增的阶梯函数;
- 其间断点均为左连续的;
- 其间断点即为X的可能取值点;
- 其间断点的跳跃高度是对应的概率值.

例3.1.1

已知X 的分布列如下:

X	0	1	2
P	1/3	1/6	1/2

求X 的分布函数.

解:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/3, & 0 \leq x < 1 \\ 1/2, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

例3.1.2

掷一枚不均匀的硬币，出现正面的概率为$p(0 < p < 1)$，设X为一直掷到正、反面都出现时所需要的次数，求X的分布列。

常用离散分布

n 重独立的伯努利试验

二项分布

记为 $X \sim B(n,p)$.

常用离散分布

n 重独立的伯努利试验

二项分布

记为 $X \sim B(n, p)$.

- X为n重伯努里试验中“成功”的次数,

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\ldots,n.$$

常用离散分布

n 重独立的伯努利试验

二项分布

记为 $X \sim B(n, p)$.

- X为n重伯努里试验中“成功”的次数,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

- 当$n = 1$时，称$b(1, p)$ 为$0-1$分布

例3.1.3

在抽检产品时，抽查了200件产品，检查结果发现其中有4件是废品，问能否相信该厂产品废品率不超过0.005

解:

假设该厂产品的废品率为0.005，容易算得200件中出现4件废品的概率为

$$C^4{}_{200} \times 0.005^4 \times (1-0.005)^{196} \simeq 0.015$$

根据人们长期实践总结出的一条原理：概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不可能发生的，现在，可以认为当废品率为0.005时，抽检200件产品出现4件废品是一概率很小的事件，而它在一次试验中就发生了，因此有理由怀疑假定的正确性，即工厂产品废品率不超过0.005不可信。

主要思想：概率反证法

二项分布中最可能出现次数的定义与推导

若$P(X=k)\geq P(X=j), j=1,2,\cdots$可取的一切值，则称k为最可能出现的次数

记$p_k=P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\ldots\ldots,n.$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{p_{k-1}}{p_k}=\frac{(1-p)k}{p(n-k-1)}\leq 1\\ \frac{p_k}{p_{k+1}}=\frac{(1-p)(k+1)}{p(n-k)}\geq 1\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\quad (n+1)p-1\leq k\leq (n+1)p$$

二项分布中最可能出现次数的定义与推导

若$P(X=k) \geq P(X=j), j=1,2,\cdots$可取的一切值，则称k为最可能出现的次数

记$p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\ldots\ldots,n.$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p_{k-1}}{p_k} = \frac{(1-p)k}{p(n-k-1)} \leq 1 \\ \frac{p_k}{p_{k+1}} = \frac{(1-p)(k+1)}{p(n-k)} \geq 1 \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow \quad (n+1)p-1 \leq k \leq (n+1)p$

- 当$(n+1)p=$整数时,在$k=(n+1)p$与$(n+1)p-1$处的概率取得最大值;

二项分布中最可能出现次数的定义与推导

若$P(X=k) \geq P(X=j), j=1,2,\cdots$可取的一切值，则称k为最可能出现的次数

记$p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\ldots\ldots,n.$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p_{k-1}}{p_k} = \frac{(1-p)k}{p(n-k-1)} \leq 1 \\ \frac{p_k}{p_{k+1}} = \frac{(1-p)(k+1)}{p(n-k)} \geq 1 \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow \quad (n+1)p-1 \leq k \leq (n+1)p$

- 当$(n+1)p=$整数时,在$k=(n+1)p$与$(n+1)p-1$处的概率取得最大值;
- 当$(n+1)p \neq$整数时，在$k=[(n+1)p]$处的概率取得最大值。

几何分布

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \quad k=1,2,\ldots\ldots$$

记为$X\sim Ge(p)$

几何分布

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \quad k=1,2,\ldots\ldots$$

记为 $X \sim Ge(p)$

- X 为独立重复的伯努里试验中， “首次成功”时的试验次数.

几何分布

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \quad k=1,2,\ldots\ldots$$

记为 $X \sim Ge(p)$

- X 为独立重复的伯努里试验中，“首次成功”时的试验次数.
- 几何分布具有无记忆性，即:

$$P(X>n+m \mid X>m)=P(X>n)$$

几何分布的无记忆性

(1) 如果X服从参数为p的几何分布，则：

$$P(X > n + m \mid X > m) = P(X > n);$$

几何分布的无记忆性

(1) 如果X服从参数为p的几何分布，则:

$$P(X > n + m \mid X > m) = P(X > n);$$

(2) 设X是取正整数值的随机变量，如果对任意的正整数m,n有

$$P(X > n + m \mid X > m) = P(X > n)$$

则X服从几何分布。

证明几何分布的无记忆性

（i）先证（1）。设$\xi \sim G(p)$，则

$$\mathbb{P}(\xi > m+n|\xi > m)$$

证明几何分布的无记忆性

（i）先证（1）。设$\xi \sim G(p)$，则

$$\mathbb{P}(\xi > m + n | \xi > m)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi > n + m, \xi > m)}{\mathbb{P}(\xi > m)}$$

证明几何分布的无记忆性

（i）先证（1）。设$\xi \sim G(p)$，则

$$\mathbb{P}(\xi > m+n|\xi > m)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi>n+m, \xi>m)}{\mathbb{P}(\xi>m)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi>n+m)}{\mathbb{P}(\xi>m)}$$

证明几何分布的无记忆性

（i）先证（1）。设$\xi \sim G(p)$，则

$$\mathbb{P}(\xi > m + n | \xi > m)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi > n+m, \xi > m)}{\mathbb{P}(\xi > m)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi > n+m)}{\mathbb{P}(\xi > m)}$$

$$= \frac{q^{n+m}}{q^m} = \sum_{k=n+1}^{\infty} q^{k-1} p$$

证明几何分布的无记忆性

（i）先证（1）。设$\xi \sim G(p)$，则

$$\mathbb{P}(\xi > m + n | \xi > m)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi > n+m, \xi > m)}{\mathbb{P}(\xi > m)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi > n+m)}{\mathbb{P}(\xi > m)}$$

$$= \frac{q^{n+m}}{q^m} = \sum_{k=n+1}^{\infty} q^{k-1} p$$

$$= \mathbb{P}(\xi > n), \quad \forall m, n \geq 1$$

（ii）再证（2），设ξ具有无记忆性，记

$$q_n \triangleq \mathbb{P}(\xi > n), \quad n \geq 1$$

（ii）再证（2），设ξ具有无记忆性，记

$$q_n \triangleq \mathbb{P}(\xi > n), \quad n \geq 1$$

由乘法公式知：对于任何正整数m和n有

$$\begin{aligned} & q_{n+m} \\ & = \mathbb{P}(\xi > n+m) \\ & = \mathbb{P}(\xi > n+m, \xi > m) \end{aligned}$$

（ii）再证（2），设ξ具有无记忆性，记

$$q_n \triangleq \mathbb{P}(\xi > n), \quad n \geq 1$$

由乘法公式知：对于任何正整数m和n有

$$
\begin{aligned}
& q_{n+m} \\
& = \mathbb{P}(\xi > n+m) \\
& = \mathbb{P}(\xi > n+m, \xi > m) \\
& = \mathbb{P}(\xi > m)\mathbb{P}(\xi > n+m | \xi > m)
\end{aligned}
$$

（ii）再证（2），设ξ具有无记忆性，记

$$q_n \triangleq \mathbb{P}(\xi > n), \quad n \geq 1$$

由乘法公式知：对于任何正整数m和n有

$$
\begin{aligned}
& q_{n+m} \\
& = \mathbb{P}(\xi > n+m) \\
& = \mathbb{P}(\xi > n+m, \xi > m) \\
& = \mathbb{P}(\xi > m)\mathbb{P}(\xi > n+m | \xi > m) \\
& = \mathbb{P}(\xi > m)\mathbb{P}(\xi > n) =
\end{aligned}
$$

（ii）再证（2），设ξ具有无记忆性，记

$$q_n \triangleq \mathbb{P}(\xi > n), \quad n \geq 1$$

由乘法公式知：对于任何正整数m和n有

$$\begin{aligned}
& q_{n+m} \\
& = \mathbb{P}(\xi > n+m) \\
& = \mathbb{P}(\xi > n+m, \xi > m) \\
& = \mathbb{P}(\xi > m)\mathbb{P}(\xi > n+m|\xi > m) \\
& = \mathbb{P}(\xi > m)\mathbb{P}(\xi > n) = q_n q_m
\end{aligned}$$

从而

$$q_n = (q_1)^n, \quad \forall n \geq 1$$

注意到ξ取正整数，显然，$0 < q_1 < 1$。记$q \triangleq q_1$，$p = 1 - q$，则

$$\mathbb{P}(\xi = k)$$

$$= q_{k-1} - q_k = q^{k-1} - q^k$$

从而

$$q_n = (q_1)^n, \quad \forall n \geq 1$$

注意到ξ取正整数，显然，$0 < q_1 < 1$。记$q \triangleq q_1$，$p = 1 - q$，则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\xi = k) \\
&= q_{k-1} - q_k = q^{k-1} - q^k \\
&= q^{k-1}(1-q) = g(k;p), \quad k \geq 2
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} g(k;p) = 1 - \frac{(1-q)q}{(1-q)} = g(1;p)$$

即$\xi \sim G(p)$。

例3.1.4

十把外形相同的钥匙中只有一把能够打开门。现任意一一试开，试对(1) 放回；(2) 不放回二种情形，求事件$E=\{$至多试3次打开门$\}$ 的概率。

解例3.1.4

(1) 用ξ表示首次开门的等待时间，

解例3.1.4

(1) 用ξ表示首次开门的等待时间，则$\xi \sim G(0.1)$，从而

$$\mathbb{P}(E)$$

$$= \mathbb{P}(\xi \le 3)$$

$$= g(1; 0.1) + g(2; 0.1) + g(3; 0.1) = 0.271$$

解例3.1.4

(1) 用ξ表示首次开门的等待时间，则$\xi \sim G(0.1)$，从而

$$\mathbb{P}(E)$$

$$= \mathbb{P}(\xi \leq 3)$$

$$= g(1; 0.1) + g(2; 0.1) + g(3; 0.1) = 0.271$$

(2) 这是古典概型，

$$\mathbb{P}(E) =$$

解例3.1.4

(1) 用ξ表示首次开门的等待时间，则$\xi \sim G\,(0.1)$，从而

$$\mathbb{P}(E)$$

$$= \mathbb{P}(\xi \leq 3)$$

$$= g(1; 0.1) + g(2; 0.1) + g(3; 0.1) = 0.271$$

(2) 这是古典概型，

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{10 \cdot 9 \cdot 8} = 0.3$$

负二项分布(巴斯卡分布)

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r,\quad k=r,r+1,\ldots\ldots$$

记为:$X\sim Nb(r,p)$.

负二项分布(巴斯卡分布)

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r,\quad k=r,r+1,\ldots\ldots$$

记为:$X\sim Nb(r,p)$.

X 表示独立重复的伯努里试验中，“第r 次成功”时的试验次数;

负二项分布(巴斯卡分布)

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r,\quad k=r,r+1,\ldots\ldots$$

记为:$X\sim Nb(r,p)$.

X 表示独立重复的伯努里试验中，“第r 次成功”时的试验次数；事实上

$$f(k;r,p)\triangleq \mathbb{P}(\xi_r=k)$$

负二项分布(巴斯卡分布)

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r,\quad k=r,r+1,\ldots\ldots$$

记为:$X\sim Nb(r,p)$.

X 表示独立重复的伯努里试验中，“第r 次成功”时的试验次数；事实上

$$f(k;r,p)\triangleq\mathbb{P}(\xi_r=k)$$

$$=\mathbb{P}\Big(\{\text{前}k-1\text{次试验中有}r-1\text{次成功}\}$$

$$\cap\{\text{第}k\text{次试验成功}\}\Big)$$

$$=$$

负二项分布(巴斯卡分布)

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r,\quad k=r,r+1,\ldots\ldots$$

记为:$X\sim Nb(r,p)$.

X 表示独立重复的伯努里试验中，“第r 次成功”时的试验次数；事实上

$$f(k;r,p)\triangleq \mathbb{P}(\xi_r=k)$$

$$=\mathbb{P}\Big(\{\text{前}k-1\text{次试验中有}r-1\text{次成功}\}$$

$$\cap\{\text{第}k\text{次试验成功}\}\Big)$$

$$=b(r-1;k-1,p)p=$$

负二项分布(巴斯卡分布)

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r,\quad k=r,r+1,\ldots\ldots$$

记为:$X\sim Nb(r,p)$.

X 表示独立重复的伯努里试验中，“第r 次成功”时的试验次数；事实上

$$f(k;r,p)\triangleq\mathbb{P}(\xi_r=k)$$

$$=\mathbb{P}\Big(\{\text{前}k-1\text{次试验中有}r-1\text{次成功}\}$$

$$\cap\{\text{第}k\text{次试验成功}\}\Big)$$

$$=b(r-1;k-1,p)p=\tbinom{k-1}{r-1}p^rq^{k-r},\quad k\geq r$$

注意

注：$\sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = 1$
证明：利用幂级数在收敛域内可逐项求导的性质

注意

注：$\sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = 1$

证明：利用幂级数在收敛域内可逐项求导的性质

当 $|\ x\ | < 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$

注意

注：$\sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = 1$
证明：利用幂级数在收敛域内可逐项求导的性质
当 $|x|<1$ $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)x^{k-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

注意

注：$\sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = 1$
证明：利用幂级数在收敛域内可逐项求导的性质
当 $|\ x\ | < 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-1) x^{k-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} (k-1)(k-2) x^{k-3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

注意

注：$\sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = 1$

证明：利用幂级数在收敛域内可逐项求导的性质

当 $|x|<1$ $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)x^{k-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} (k-1)(k-2)x^{k-3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=3}^{\infty} C_{k-1}^{2} x^{k-3} = \frac{1}{(1-x)^3}$$

注意(续)

归纳地:

$$\sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^r}$$

令 $x = 1 - p$

$$\Longrightarrow \sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} (1-p)^{k-r} = \frac{1}{(p)^r}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = 1$$

巴拿赫火柴盒问题

数学家的左右衣袋中各放有一盒装有N根火柴的火柴盒，每次抽烟时任取一盒用一根，求发现一盒用光时，另一盒恰有r根的概率。

解巴拿赫火柴盒问题

用A表示“发现一盒已空，而另一盒尚剩r根”的事件，ξ_K与η_M分别表示“第K次取甲盒的火柴”和“第M次取乙盒的火柴”时总的取火柴的次数，则

解巴拿赫火柴盒问题

用A表示“发现一盒已空，而另一盒尚剩r根”的事件，ξ_K与η_M分别表示“第K次取甲盒的火柴”和“第M次取乙盒的火柴”时总的取火柴的次数，则

$$\xi_K \sim Nb\left(K, \frac{1}{2}\right), \quad \eta_M \sim Nb\left(M, \frac{1}{2}\right)$$

解巴拿赫火柴盒问题

用A表示“发现一盒已空，而另一盒尚剩r根”的事件，ξ_K与η_M分别表示“第K次取甲盒的火柴”和“第M次取乙盒的火柴”时总的取火柴的次数，则

$$\xi_K \sim Nb\left(K, \frac{1}{2}\right), \quad \eta_M \sim Nb\left(M, \frac{1}{2}\right)$$

$$A = \{\xi_{N+1} = 2N - r + 1\} \cup \{\eta_{N+1} = 2N - r + 1\}$$

注意到

$$\{\xi_{N+1} = 2N - r + 1\} \cap \{\eta_{N+1} = 2N - r + 1\} = \emptyset$$

可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A)\\
&=2f\left(2N-r+1;N+1,\tfrac{1}{2}\right)\\
&=\binom{2N-r}{N}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2N-r}
\end{aligned}
$$

例3.1.5

分赌注问题： 甲、乙二人赌博，各出赌注50元，共100元，每局甲、乙胜的机会均等，都是1/2。约定：谁先胜满3局则他赢得全部赌注100元，现已赌完3局，甲2胜1负，但因故中断赌博，问这100元赌注该如何分给2人，才算公平

例3.1.5

分赌注问题： 甲、乙二人赌博，各出赌注50元，共100元，每局甲、乙胜的机会均等，都是1/2。约定：谁先胜满3局则他赢得全部赌注100元，现已赌完3局，甲2胜1负，但因故中断赌博，问这100元赌注该如何分给2人，才算公平

问题的一般化： 甲、乙二人赌博，各出赌注50元，共100元，每局甲胜的概率为p，乙胜的概率为$q=1-p$。约定：谁先胜t局则他赢得全部赌注100元，现甲胜$r(r<t)$局，乙胜$s(s<t)$局。但因故中断赌博，问这100元赌注该如何分给2人，才算公平？

分赌注问题的背景

1654年，职业赌徒德梅雷尔（De Mere）向数学家巴斯卡（Pascal）提出如下问题：甲乙二人各下堵注d元，商定先胜三局者赢得全部赌金。假定在每一局中二人获胜机会相等，且各局胜负相互独立。当甲胜一局而乙尚未获胜时赌博被迫中止，问赌注应该如何分？为解决此问题，巴斯卡与大数学家费尔马（Fermat）以及年轻的物理学家惠更斯（Huygans）进行了卓有成效的讨论，圆满地回答了问题，引起了欧当时欧洲数学家对概率论的兴趣。

超几何分布

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\text{记为}\,X\sim\ h(n,N,M).$$

超几何分布

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\text{,记为}X\sim\ h(n,N,M).$$

超几何分布对应于不返回抽样模型:

▷ N 个产品中有M 个不合格品,

▷ 从中抽取n个,不合格品的个数为X .

泊松分布

若随机变量X 的概率分布为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,\ldots\ldots$$

则称X 服从参数为λ 的泊松分布,记为$X\sim P(\lambda)$

泊松定理

(二项分布的泊松近似)（P102定理2.4.1）

在n重伯努里试验中，记p_n 为一次试验中成功的概率.若$np_n \to \lambda$则:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

泊松定理证明

证:记 $np_n = \lambda_n$

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

泊松定理证明

证:记 $np_n = \lambda_n$

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{\lambda_n^k}{k!}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}(-\lambda_n)\left(\frac{n-k}{n}\right)}$$

泊松定理证明

证:记 $np_n = \lambda_n$

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{\lambda_n^k}{k!}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}(-\lambda_n)\left(\frac{n-k}{n}\right)}$$

$$\to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 1, 2, \dots\dots$$

泊松分布中参数λ的实际意义: $\lambda \approx np$

例3.1.6

某某厂产品不合格率为0.03, 现将产品装箱, 若要以不小于90%的概率保证每箱中至少有100 个合格品, 则每箱至少应装多少个产品?

解

解:

解

解： 设每箱至少应装$100+n$个，

解

解： 设每箱至少应装$100+n$个，每箱的不合格品个数为X，
则$X \sim B(100+n, 0.03)$

解

解： 设每箱至少应装$100+n$个，每箱的不合格品个数为X，
则$X \sim B(100+n, 0.03)$
由题意：$P(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n} P_{100+n}(k) \geq 0.9$

解

解： 设每箱至少应装$100+n$个，每箱的不合格品个数为X，
则$X\sim B(100+n,0.03)$
由题意：$P(X\leq n)=\sum_{k=0}^{n}P_{100+n}(k)\geq 0.9$
应用Poisson定理

解

解： 设每箱至少应装$100+n$个，每箱的不合格品个数为X，
则$X \sim B(100+n, 0.03)$
由题意：$P(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n} P_{100+n}(k) \geq 0.9$
应用Poisson定理注意到$(100+n)0.03 = 3 + 0.03n \approx 3$ 取 $\lambda = 3$

$$\sum_{k=0}^{n} P_{100+n}(k) \approx$$

解

解: 设每箱至少应装$100+n$个, 每箱的不合格品个数为X,
则$X \sim B(100+n, 0.03)$
由题意: $P(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n} P_{100+n}(k) \geq 0.9$
应用Poisson定理注意到$(100+n)0.03 = 3 + 0.03n \approx 3$ 取 $\lambda = 3$

$$\sum_{k=0}^{n} P_{100+n}(k) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} e^{-3} = 1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \geq 0.9$$

$\Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \leq 0.1,$

解

解： 设每箱至少应装$100+n$个，每箱的不合格品个数为X，
则$X \sim B(100+n, 0.03)$
由题意：$P(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n} P_{100+n}(k) \geq 0.9$
应用Poisson定理注意到$(100+n)0.03 = 3 + 0.03n \approx 3$ 取 $\lambda = 3$

$$\sum_{k=0}^{n} P_{100+n}(k) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} e^{-3} = 1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \geq 0.9$$

$\Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \leq 0.1$，查Poisson分布表，$\lambda = 3$
得$n+1=6, n=5$ 故每箱至少应装105个产品，才能符合要求.

连续型随机变量

一、连续型随机变量的定义

连续型随机变量

一、连续型随机变量的定义

设随机变量X 的分布函数为$F(x)$,若存在非负可积函数$p(x)$ ，满足:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

则称X 为连续随机变量，称$p(x)$为概率密度函数，简称密度函数.

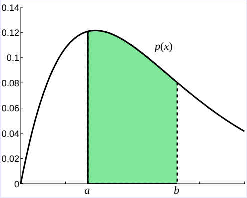
连续型随机变量

一、连续型随机变量的定义

设随机变量X 的分布函数为$F(x)$,若存在非负可积函数$p(x)$，满足:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

则称X 为连续随机变量，称$p(x)$为概率密度函数，简称密度函数.



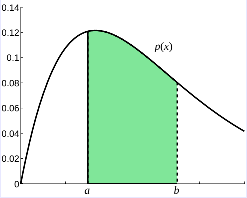
连续型随机变量

一、连续型随机变量的定义

设随机变量X 的分布函数为$F(x)$,若存在非负可积函数$p(x)$ ，满足:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

则称X 为连续随机变量，称$p(x)$为概率密度函数，简称密度函数.



$$P(a \le X < b) = \int_{a}^{b} p(x)\,dx$$

密度函数特征性质:

- $p(x) \geq 0$; (非负性)

密度函数特征性质:

- $p(x) \geq 0$; (非负性)
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ (正则性)

密度函数特征性质:

- $p(x) \geq 0$; (非负性)
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ (正则性)

满足以上两个条件的函数都可以看成某个连续随机变量的概率密度函数.

●密度函数的概率含义:

密度函数特征性质:

- $p(x) \geq 0$; (非负性)
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ (正则性)

满足以上两个条件的函数都可以看成某个连续随机变量的概率密度函数.

•密度函数的概率含义: 当$\Delta > 0$很小时,

$$\mathbb{P}(\xi \in [x - \Delta, x + \Delta])$$

密度函数特征性质:

- $p(x) \geq 0$; (非负性)
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ (正则性)

满足以上两个条件的函数都可以看成某个连续随机变量的概率密度函数.

•密度函数的概率含义：当$\Delta > 0$很小时，

$$\mathbb{P}(\xi \in [x-\Delta, x+\Delta]) = \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} p(t)dt \approx \frac{1}{2}\Delta p(x)$$

密度函数特征性质:

- $p(x) \geq 0$; (非负性)
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ (正则性)

满足以上两个条件的函数都可以看成某个连续随机变量的概率密度函数.

•密度函数的概率含义: 当$\Delta > 0$很小时,

$$\mathbb{P}(\xi \in [x-\Delta, x+\Delta]) = \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} p(t)dt \approx \frac{1}{2}\Delta p(x)$$

- 若ξ为连续型随机变量, 则

$$\mathbb{P}(\xi = x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

密度函数特征性质:

- $p(x) \geq 0$; (非负性)
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ (正则性)

满足以上两个条件的函数都可以看成某个连续随机变量的概率密度函数.

•密度函数的概率含义:当$\Delta > 0$很小时,

$$\mathbb{P}(\xi \in [x-\Delta, x+\Delta]) = \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} p(t)dt \approx \frac{1}{2}\Delta p(x)$$

- 若ξ为连续型随机变量,则

$$\mathbb{P}(\xi = x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

- 分布函数分段可微$\Rightarrow$连续型,此时密度函数由分段导函数决定。

密度函数特征性质:

- $p(x) \geq 0$; (非负性)
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ (正则性)

满足以上两个条件的函数都可以看成某个连续随机变量的概率密度函数.

•密度函数的概率含义：当$\Delta > 0$很小时，

$$\mathbb{P}(\xi \in [x-\Delta, x+\Delta]) = \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} p(t)dt \approx \frac{1}{2}\Delta p(x)$$

- 若ξ为连续型随机变量，则

$$\mathbb{P}\left(\xi = x\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

- 分布函数分段可微$\Rightarrow$连续型，此时密度函数由分段导函数决定。
- 连续型分布函数为连续函数，反之不真。

连续型随机变量分布函数的性质:

(1) $P\{a < X \leq b\} = P\{a < X < b\}$

连续型随机变量分布函数的性质:

(1) $P\{a < X \leq b\} = P\{a < X < b\}$

$= \mathrm{P}\{ \mathrm{a} \leq X < b\}$

连续型随机变量分布函数的性质:

(1) $P\{a < X \le b\} = P\{a < X < b\}$

$=\mathrm{P}\{\ \mathrm{a} \le X < b\}$

$=\mathrm{P}\{\ \mathrm{a} \le X \le b\}$

连续型随机变量分布函数的性质:

(1) $P\{a < X \leq b\} = P\{a < X < b\}$

$=P\{ a \leq X < b\}$

$=P\{ a \leq X \leq b\}$

$=F(b)-F(a).$

(2) $F(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的连续函数;

连续型随机变量分布函数的性质:

(1) $P\{a < X \leq b\} = P\{a < X < b\}$

$= \mathrm{P}\{\ \mathrm{a} \leq X < b\}$

$= \mathrm{P}\{\ \mathrm{a} \leq X \leq b\}$

$= \mathrm{F(b)\text{-}F(a)}.$

(2) $F(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的连续函数;

(3) $P(X = x) = F(x) - F(x - 0) = 0;$

连续型随机变量分布函数的性质:

(1) $P\{a < X \leq b\} = P\{a < X < b\}$

$=$P{ a $\leq X < b\}$

$=$P{ a $\leq X \leq b\}$

$=$F(b)-F(a).

(2) $F(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的连续函数;

(3) $P(X = x) = F(x) - F(x - 0) = 0;$

(4) 当$F(x)$ 在x点可导时,$p(x) = F'(x)$

连续型随机变量分布函数的性质:

(1) $P\{a < X \leq b\} = P\{a < X < b\}$
$=\mathrm{P}\{\ \mathrm{a} \leq X < b\}$
$=\mathrm{P}\{\ \mathrm{a} \leq X \leq b\}$
$=\mathrm{F(b)\text{-}F(a)}.$

(2) $F(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的连续函数;

(3) $P(X = x) = F(x) - F(x-0) = 0$;

(4) 当$F(x)$ 在x点可导时,$p(x) = F'(x)$

当$F(x)$ 在x点不可导时, 可令$p(x) = 0$.

离散型与连续性随机变量的比较:

离散型

连续型

离散型与连续性随机变量的比较:

离散型	连续型
分布列:$p_n = P(X = x_n)$(唯一)	密度函数:$X \sim p(x)$(几乎处处唯一)

离散型与连续性随机变量的比较:

离散型	连续型
分布列:$p_n = P(X = x_n)$(唯一)	密度函数:$X \sim p(x)$(几乎处处唯一)
$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$
$F(a-0) = F(a)$	$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a)$.

离散型与连续性随机变量的比较:

离散型	连续型
分布列:$p_n = P(X = x_n)$(唯一)	密度函数:$X \sim p(x)$(几乎处处唯一)
$F(x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$
$F(a-0) = F(a)$	$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).$
点点计较	$P(X = a) = 0$

离散型与连续性随机变量的比较:

离散型	连续型
分布列:$p_n = P(X = x_n)$(唯一)	密度函数:$X \sim p(x)$(几乎处处唯一)
$F(x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$
$F(a-0) = F(a)$	$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).$
点点计较	$P(X = a) = 0$
$F(x)$为阶梯函数	$F(x)$为连续函数。

常见的连续型随机变量

- 正态分布

常见的连续型随机变量

- 正态分布
- 均匀分布

常见的连续型随机变量

- 正态分布
- 均匀分布
- 指数分布

常见的连续型随机变量

- 正态分布
- 均匀分布
- 指数分布
- $\Gamma-$分布

常见的连续型随机变量

- 正态分布
- 均匀分布
- 指数分布
- $\Gamma-$分布
- 贝塔分布

正态分布

$$\varphi_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < \infty$$

记为$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中$\sigma > 0$, μ是任意实数.

正态分布

$$\varphi_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < \infty$$

记为$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中$\sigma > 0$, μ是任意实数.

- μ 是位置参数.

正态分布

$$\varphi_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},-\infty<x<\infty$$

记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中$\sigma>0,\mu$是任意实数.

- μ 是位置参数.
- σ是尺度参数.

验证$\varphi_{a,\sigma}(x)$为密度函数

显然$\varphi_{a,\sigma}(x) > 0$。记$I \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)dx$，只需证明$I = 1$。

验证$\varphi_{a,\sigma}(x)$为密度函数

显然$\varphi_{a,\sigma}(x) > 0$。记$I \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)dx$，只需证明$I = 1$。事实上，

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,\sigma}(y)dy \\
&=
\end{aligned}
$$

验证$\varphi_{a,\sigma}(x)$为密度函数

显然$\varphi_{a,\sigma}(x) > 0$。记$I \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)dx$，只需证明$I = 1$。事实上，

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,\sigma}(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)\varphi_{a,\sigma}(y)dy \\ &= \end{aligned}$$

验证$\varphi_{a,\sigma}(x)$为密度函数

显然$\varphi_{a,\sigma}(x) > 0$。记$I \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)dx$，只需证明$I = 1$。事实上，

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,\sigma}(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a,\sigma}(x)\varphi_{a,\sigma}(y)dy \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}} dxdy
\end{aligned}$$

利用极坐标变换得

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} re^{-r^2} 2dr = 1$$

注意到$I > 0$得证$I = 1$。

正态分布的背景:

若一随机现象是许许多多小的偶然因素共同作用的总和，各偶然因素所起的作用势均力敌，没行哪个起主导作用。那么这个随机现象可以用正态分布来刻画（中心极限定理）。

正态分布的背景:

若一随机现象是许许多多小的偶然因素共同作用的总和，各偶然因素所起的作用势均力敌，没行哪个起主导作用。那么这个随机现象可以用正态分布来刻画（中心极限定理）。

正态分布随机变量广泛存在于客观世界中。例如，产品的质量指标，诸如尺寸，含量，强度等；正态分布在误差分析及炮弹弹着点的分布等方面也有相当成功的应用。

对密度函数的分析

(1) $p(x)$关于μ是对称的,在μ点$p(x)$取得最大值

对密度函数的分析

(1) $p(x)$关于μ是对称的,在μ点$p(x)$取得最大值

(2) 若σ固定, μ改变,$p(x)$左右移动,形状保持不变.

对密度函数的分析

(1) $p(x)$关于μ是对称的,在μ点$p(x)$取得最大值

(2) 若σ固定, μ改变,$p(x)$左右移动,形状保持不变.

(3) 若μ固定, σ改变,σ越大曲线越平坦;σ越小曲线越陡峭.

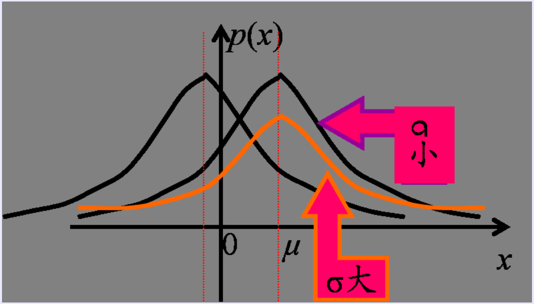
对密度函数的分析

(1) $p(x)$关于μ是对称的,在μ点$p(x)$取得最大值

(2) 若σ固定, μ改变,$p(x)$左右移动,形状保持不变.

(3) 若μ固定, σ改变,σ越大曲线越平坦;σ越小曲线越陡峭.

(4) $p(x)$是对数凹函数。



标准正态分布N(0, 1)

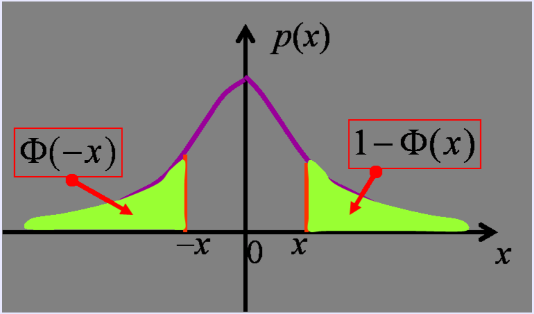
密度函数记为:

$$\varphi(x)$$

分布函数记为:

$$\Phi(x)$$

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



一般正态分布与标准正态分布

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 则

一般正态分布与标准正态分布

设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 则

$$Y \sim N(0,1)$$

设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则

一般正态分布与标准正态分布

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 则

$$Y \sim N(0, 1)$$

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

$$P(X < a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),\ P(X > a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$\Phi(x)$的计算

(1) $x \geq 0$时,查标准正态分布函数表.
(2) $x \leq 0$时,用$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$
若$\sim N(0,1)$,则

$\Phi(x)$的计算

(1) $x \geq 0$时,查标准正态分布函数表.
(2) $x \leq 0$时,用$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$
若$\sim N(0,1)$,则

- $P(X \leq a) = \Phi(a)$;

$\Phi(x)$的计算

(1) $x \geq 0$时,查标准正态分布函数表.

(2) $x \leq 0$时,用$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

若$\sim N(0,1)$,则

- $P(X \leq a) = \Phi(a)$;
- $P(X > a) = 1 - \Phi(a)$;

$\Phi(x)$的计算

(1) $x \geq 0$时,查标准正态分布函数表.

(2) $x \leq 0$时,用$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

若$\sim N(0,1)$,则

- $P(X \leq a) = \Phi(a);$
- $P(X > a) = 1 - \Phi(a);$
- $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a);$

$\Phi(x)$的计算

(1) $x \geq 0$时,查标准正态分布函数表.
(2) $x \leq 0$时,用$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$
若$\sim N(0,1)$,则

- $P(X \leq a) = \Phi(a)$;
- $P(X > a) = 1 - \Phi(a)$;
- $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$;
- 若$a \geq 0$,则

$$
\begin{aligned}
P(|X| < a) &= P(-a < X < a) = \Phi(a) - \Phi(-a) \\
&= \Phi(a) - [1 - \Phi(a)] = 2\Phi(a) - 1
\end{aligned}
$$

3σ规则

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

3σ规则

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

- $P(| X - \mu | < \sigma) = 0.6828.$

3σ规则

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

- $P(|X - \mu| < \sigma) = 0.6828.$
- $P(|X - \mu| < 2\sigma) = 0.9545$

3σ规则

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

- $P(| X - \mu | < \sigma) = 0.6828.$
- $P(| X - \mu | < 2\sigma) = 0.9545$
- $P(| X - \mu | < 3\sigma) = 0.9974.$

3σ规则

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

- $P(|X-\mu|<\sigma)=0.6828.$
- $P(|X-\mu|<2\sigma)=0.9545$
- $P(|X-\mu|<3\sigma)=0.9974.$

$P(|X-\mu|<3\sigma)=P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)$

3σ规则

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

- $P(| X - \mu |< \sigma) = 0.6828.$
- $P(| X - \mu |< 2\sigma) = 0.9545$
- $P(| X - \mu |< 3\sigma) = 0.9974.$

$P(| X - \mu |< 3\sigma) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$
$= \Phi\left(\frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma}\right)$
$= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 2 \times 0.9987 - 1 = 0.9974$

3σ规则

设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则

- $P(\mid X-\mu \mid < \sigma) = 0.6828.$
- $P(\mid X-\mu \mid < 2\sigma) = 0.9545$
- $P(\mid X-\mu \mid < 3\sigma) = 0.9974.$

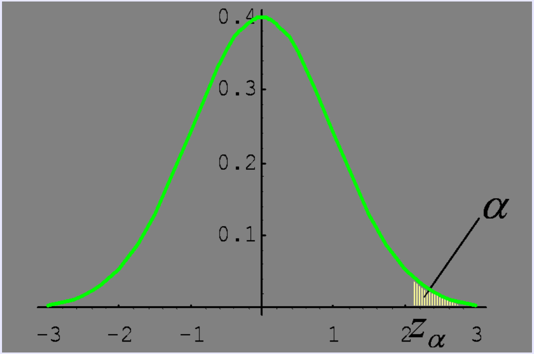
$P(\mid X-\mu \mid < 3\sigma) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$
$= \Phi\left(\frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma}\right)$
$= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 2 \times 0.9987 - 1 = 0.9974$
由3σ原理知,当$a < -3$ 时,$\Phi(a) \approx 0$;当$b > 3$时,$\Phi(b) \approx 1$

标准正态分布的上α分位数z_α

设$X \sim N(0,1), 0 < \alpha < 1$, 称满足

$$P(X > z_\alpha) = \alpha$$

的点z_α为X的上α分位数



常用数据:$z_{0.05} = 1.645, z_{0.025} = 1.96$

例3.1.7（P137 例3）

从南郊某地乘车前往北区火车站，有两条线路可走。

例3.1.7（P137 例3）

从南郊某地乘车前往北区火车站，有两条线路可走。第一条穿过市区，路程短但交通拥挤，所需时间（单位为分）服从正态分布$N(50, 100)$。

例3.1.7（P137 例3）

从南郊某地乘车前往北区火车站，有两条线路可走。第一条穿过市区，路程短但交通拥挤，所需时间（单位为分）服从正态分布$N(50, 100)$。第二条沿环城公路，路程较长意外阻塞较少，所需时间（单位为分）服从正态分布$N(60, 16)$。

例3.1.7（P137 例3）

从南郊某地乘车前往北区火车站，有两条线路可走。第一条穿过市区，路程短但交通拥挤，所需时间（单位为分）服从正态分布$N(50, 100)$。第二条沿环城公路，路程较长意外阻塞较少，所需时间（单位为分）服从正态分布$N(60, 16)$。（1）假如有70分钟可用，问应该走那条路线？（2）假如有65分钟可用，问又应该走那条路线？

均匀分布

若X 的$d.f$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

则称X服从区间(a,b)上的均匀分布或称X 服从参数为a,b的均匀分布. 记作

$$X \sim U(a,b)$$

均匀分布的分布函数

若$X \sim U(a,b)$,则X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

$\forall (c,d) \subset (a,b)$,

$$P(c<X<d)=\int_{c}^{d} \frac{1}{b-a}dx=\frac{d-c}{b-a}$$

即X 落在(a,b)内任何长为$d-c$的小区间的概率与小区间的位置无关，只与其长度成正比．这正是几何概型的情形．

指数分布

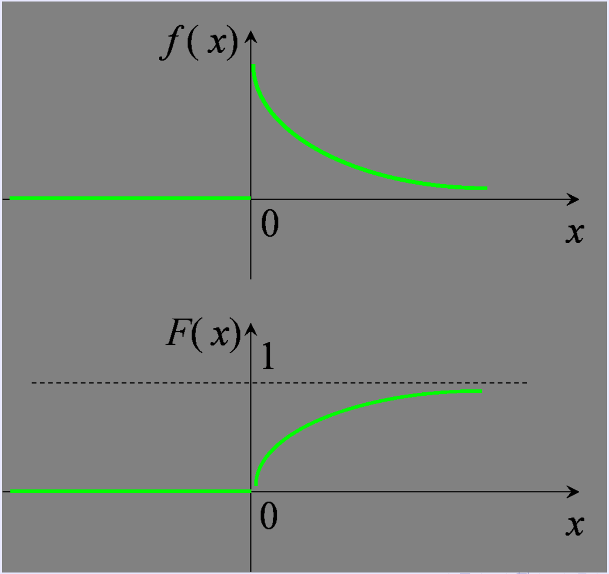
若X 的$d.f$ 为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$\lambda>0$为常数.则称X 服从参数为λ的指数分布
记作$X\sim E(\lambda)$,X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}$$

指数分布图像



指数分布的“无记忆性”

若$X \sim E(\lambda)$,则

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

事实上

指数分布的“无记忆性”

若$X \sim E(\lambda)$,则

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

事实上

$$P(X > s+t \mid X > s) =$$

指数分布的“无记忆性”

若$X \sim E(\lambda)$,则

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

事实上

$$P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P(X > s + t, X > s)}{P(X > s)} =$$

指数分布的“无记忆性”

若$X \sim E(\lambda)$,则

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

事实上

$$P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P(X > s + t, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)}$$

$$=$$

指数分布的“无记忆性”

若$X \sim E(\lambda)$,则

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

事实上

$$P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P(X > s + t, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)}$$

$$= \frac{1 - P(X \leq s + t)}{1 - P(X \leq s)} =$$

指数分布的“无记忆性”

若$X \sim E(\lambda)$,则

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

事实上

$$P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)}$$

$$= \frac{1 - P(X \leq s+t)}{1 - P(X \leq s)} = \frac{1 - F(s+t)}{1 - F(s)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

- 故又把指数分布称为“永远年轻”的分布.

伽玛分布

$$p(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

记为$X \sim Ga(\alpha, \lambda)$,其中$\alpha > 0, \lambda > 0.$

伽玛分布

$$p(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

记为$X \sim Ga(\alpha, \lambda)$,其中$\alpha > 0, \lambda > 0$.
$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$为伽玛函数.

伽玛分布

$$p(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

记为$X \sim Ga(\alpha, \lambda)$,其中$\alpha > 0, \lambda > 0$.
$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$为伽玛函数.
注:

- $\Gamma(1) = 1,\ \ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},\ \ \Gamma(n+1) = n!$

伽玛分布

$$p(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

记为$X \sim Ga(\alpha, \lambda)$,其中$\alpha > 0, \lambda > 0$.
$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$为伽玛函数.
注:

- $\Gamma(1) = 1,\ \ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},\ \ \Gamma(n+1) = n!$
- $Ga(1, \lambda) = Exp(\lambda)$

贝塔分布

$$p(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1$$

记为$X \sim Be(a,b)$,其中$a > 0, b > 0$.

贝塔分布

$$p(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1$$

记为$X \sim Be(a,b)$,其中$a > 0, b > 0$.
$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$为贝塔函数.
注:

- $B(a,b) = B(b,a)$

贝塔分布

$$p(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1$$

记为$X \sim Be(a,b)$,其中$a > 0, b > 0$.
$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$为贝塔函数.
注:

- $B(a,b) = B(b,a)$
- $$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

贝塔分布

$$p(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1$$

记为$X \sim Be(a,b)$,其中$a > 0, b > 0$.
$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$为贝塔函数.
注:

- $B(a,b) = B(b,a)$
- $$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$
- $Be(1,1) = U(0,1)$

思考题

上海某年有9万名高中毕业生参加高考，结果有5.4万名被各类高校录取．考试满分为600分，540分以上有2025人，360分以下有13500人．试估计高校录取最低分．

随机向量（多维随机变量）

定义：若X, Y 是两个定义在同一个样本空间上的随机变量，则称(X, Y) 是两维随机向量.

同理可定义n 维随机向量（n维随机变量）.

随机向量的联合分布函数

定义：(以下仅讨论两维随机变量)
任对实数x 和y ,称

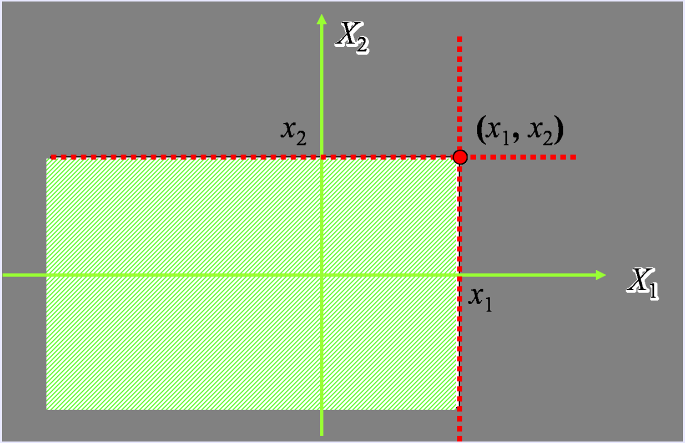
$$F(x,y)=P(X<x,Y<y)$$

为(X,Y) 的联合分布函数.

- 注意:

$F(x,y)$为(X,Y)落在点(x,y)的左下区域的概率

随机向量的联合分布函数



联合分布函数的基本性质

联合分布函数的基本性质

- $F(x,y)$关于x和y分别单调增. (单调性)

联合分布函数的基本性质

- $F(x,y)$关于x和y分别单调增. (单调性)
- $0 \le F(x,y) \le 1$, 且
  $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1$. (有界性)

联合分布函数的基本性质

- $F(x,y)$关于x和y分别单调增. (单调性)
- $0 \le F(x,y) \le 1$, 且
  $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1.$ (有界性)
- $F(x,y)$ 关于x 和y分别左连续 (左连续性)

联合分布函数的基本性质

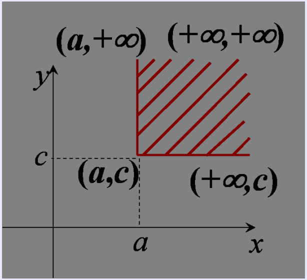
- $F(x,y)$关于x和y分别单调增. (单调性)
- $0 \le F(x,y) \le 1$, 且
$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1.$ (有界性)
- $F(x,y)$ 关于x 和y分别左连续 (左连续性)
- 当$a < b, c < d$ 时，有 (非负性)
$F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \ge 0.$

4.注意

$$P(X>a,Y>c)\neq 1-F(a,c)$$

$$P(X>a,Y>c)=P(a<X<+\infty,c<Y<+\infty)$$

$$=1-F(+\infty,c)-F(a,+\infty)+F(a,c)$$



二维离散随机变量联合分布列

若(X,Y)的可能取值为有限对、或可列对，则称(X,Y)为二维离散随机变量.

称$p_{ij}=P(X=X_i,Y=y_j),i,j=1,2,\dots,$ 为(X,Y) 的联合分布列，其表格形式如下:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

联合分布列的基本性质

(1) ：

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

(非负性)

(2) ：

$$\sum \sum p_{ij} = 1,$$

(正则性)

确定联合分布列的方法

(1) 确定随机变量(X, Y) 的所有取值数对.

(2) 计算取每个数值对的概率

(3) 列出表格.

例3.2.1

将一枚均匀的硬币抛掷4次，X表示正面向上的次数，Y表示反面朝上次数。求(X,Y) 的联合分布列.

例(解)

解:

概率非零的(X,Y) 可能取值对为:

X	Y	其对应的概率分别为:
0	4	$P(X=0,Y=4)=0.5^4=1/16$
1	3	$P(X=1,Y=3)=C_4^1\times 0.5\times 0.5^3=1/4$
2	2	$P(X=2,Y=2)=C_4^2\times 0.5^2\times 0.5^2=6/16$
3	1	$P(X=3,Y=1)=C_4^3\times 0.5^3\times 0.5^1=1/4$
4	0	$P(X=4,Y=0)=0.5^4=1/16$

7.例3.2.1(解)

解:
列表为:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	1/16
1	0	0	0	1/4	0
2	0	0	6/16	0	0
3	0	1/4	0	0	0
4	1/16	0	0	0	0

联合密度函数

设二维随机变量(X,Y) 的分布函数为$F(x,y)$，若存在非负可积函数$p(x,y)$使得

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dvdu$$

则称(X,Y) 为二维连续型随机变量,称$p(x,y)$ 为联合密度函数。

联合密度函数的基本性质

(1) :

$$p(x, y) \geq 0.$$

(非负性)
(2) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1,$$

(正则性)

- 注意:

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D p(x, y) dx dy$$

多项分布

若每次试验有r 种结果:$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_r$记

$$P(A_i) = p_i,\ \ i = 1, 2, \ldots\ldots, r$$

记X_i为n次独立重复试验中A_i 出现的次数.
则$(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_r)$的联合分布列为:

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots\ldots, X_r = n_r) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}$$

多维超几何分布

口袋中有N 只球，分成r 类,第i种球有N_i 只，

$$N_1 + N_2 + \ldots \cdots + N_r = N.$$

从中任取n只，记X_i为取出的n只球中，第i种球的只数.
则$(X_1, X_2, \ldots \ldots, X_r)$的联合分布列为:

多维超几何分布

口袋中有N 只球，分成r 类,第i种球有N_i 只，

$$N_1 + N_2 + \ldots \cdots + N_r = N.$$

从中任取n只，记X_i为取出的n只球中，第i种球的只数.
则$(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_r)$的联合分布列为:

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots\ldots, X_r = n_r) = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\ldots\ldots\binom{N}{n_r}}{C_N^n}$$

二维均匀分布

若二维连续随机变量(X, Y) 的联合密度为:

二维均匀分布

若二维连续随机变量(X,Y) 的联合密度为:

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

其中S_D为D的面积.则称(X,Y) 服从D上的均匀分布，记为

$$(X,Y)\sim U(D).$$

二维正态分布

若二维连续随机变量(X, Y) 的联合密度为:

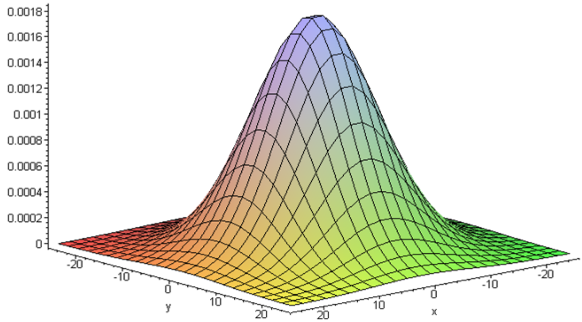
$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}$$

则称(X, Y) 服从二维正态分布，记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$$

二维正态分布密度函数图



例3.2.2

若

$$(X,Y) \sim p(x,y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

试求$P\{(X,Y) \in D\}$,其中D为$2x+3y \leq 6$

例3.2.2(解)

解:

解:

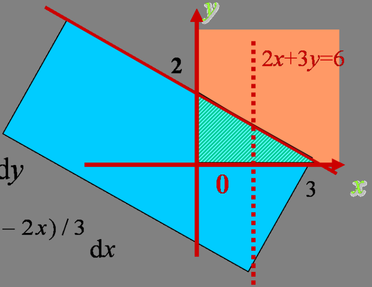
$$P\{(X,Y)\in D\}$$

$$=\iint\limits_{2x+3y\le 6} p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^3 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{3}(6-2x)} 6e^{-(2x+3y)}\mathrm{d}y$$

$$=6\int_0^3 e^{-2x}\left(-\frac{1}{3}e^{-3y}\right)\Bigg|_0^{(6-2x)/3}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^3 (e^{-2x}-e^{-6})\mathrm{d}x \quad = 1-7e^{-6}$$



例3.2.3

设二维随机变量(X, Y) 的密度函数为:

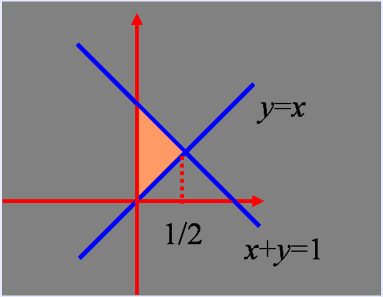
$$p(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

求概率$P\{X + Y \leq 1\}$.

例3.2.3(解)

解:

$$P\{X+Y\le 1\} = \int_0^{1/2} dx \int_x^{1-x} e^{-y} dy$$
$$= 1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}$$



边际分布

已知二维随机变量(X, Y) 的分布，
是否可由(X, Y)的联合分布求出X 和Y各自的分布？

边际分布函数

已知(X,Y) 的联合分布函数为$F(x,y)$ 则

$$X \sim F_X(x) = F(x,+\infty)$$

$$Y \sim F_Y(y) = F(+\infty,y)$$

边际分布列

已知(X, Y) 的联合分布列为p_{ij} 则
X的分布列为:

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{i.}$$

Y 的分布列为:

$$p_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{.j}$$

边际分布列图

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	

边际密度函数

已知(X,Y) 的联合密度函数为$p(x,y)$
则
X 的密度函数为:

$$p(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

Y 的密度函数为:

$$p(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$$

注意

注意

- 由联合分布可以求出边际分布.

注意

- 由联合分布可以求出边际分布.
- 但由边际分布一般无法求出联合分布.

注意

- 由联合分布可以求出边际分布.
- 但由边际分布一般无法求出联合分布.
- 所以联合分布包含更多的信息.

注意

- 由联合分布可以求出边际分布.
- 但由边际分布一般无法求出联合分布.
- 所以联合分布包含更多的信息.
- 二维正态分布的边际分布是一维正态：若

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$$

则

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

19.证明

$$f_X(x) = \frac{e^{-x^2/2(1-\rho^2)}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2-2\rho xy)/2(1-\rho^2)} dy$$

$$= \frac{e^{-x^2/2(1-\rho^2)}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2-2\rho xy+\rho^2x^2-\rho^2x^2)/2(1-\rho^2)} dy$$

$$= \frac{e^{-x^2(1-\rho^2)/2(1-\rho^2)}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(y-\rho x)^2/2(1-\rho^2)}}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

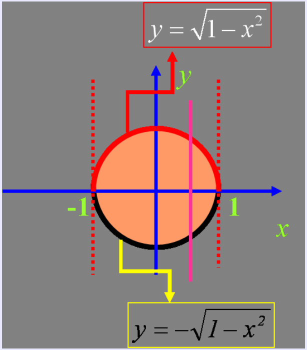
19.例

(二维均匀分布的边际分布不一定是一维均匀分布.) 设(X, Y)服从区域$D = \{(x, y), x_2 + y_2 < 1\}$ 上的均匀分布，求X的边际密度$p(x)$.

19.例(解)

解： 由题意得

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x_2+y_2\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$



19.例(解)

当$|x|>1$时，$p(x,y)=0$，所以$p(x)=0$

当$|x|\leq 1$时，

$$p(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

不是均匀分布

20.条件分布(1)

二维离散r.v.的条件分布律

设二维离散型$r.v.(X,Y)$的分布

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\ldots$$

若 $p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}>0$ 则称

$$\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}=P(Y=y_j\mid X=x_i)\quad j=1,2,\ldots$$

为在$X=x_i$ 的条件下, Y 的条件分布律

20.条件分布(2)

若 $p_{\cdot j}=P(Y=y_i)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}>0$ 则称

$$\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=P(X=x_i\mid Y=y_j)\quad j=1,2,\ldots$$

为在$Y=y_j$ 的条件下, X 的条件分布律

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j\mid X=x_i)$$

$$=P(Y=y_i)P(X=x_i\mid Y=y_j),i,j=1,2,\ldots$$

20.条件分布(3)

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i\mid Y=y_j)P(Y=y_j),\quad i,j=1,2,\dots$$

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P(Y=y_j\mid X=x_i)P(X=x_i),\quad i,j=1,2,\dots$$

20.例

把三个球等可能地放入编号为1, 2, 3的三个盒子中, 每盒可容球数无限. 记X 为落入1号盒的球数, Y 为落入2 号盒的球数, 求

(1) 在$Y = 0$ 的条件下, X的分布律;

(2) 在$X = 2$的条件下, Y的分布律.

21.求解(1)

先求联合分布,

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)$$

$$=C_3^i\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{3-i}C_{3-i}^j\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{3-i-j}$$

$,j=0,\ldots,3-i;i=0,1,2,3;$ 其联合分布与边缘分布如下表所示

21.求解(1)

$Y \backslash X$ (p_{ij})	0	1	2	3	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0	$\frac{1}{27}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	1

21.求解(2)

$$P(X=i \mid Y=0)=\frac{P(X=i, Y=0)}{P(Y=0)}$$

$$=\frac{P(X=i, Y=0)}{8/27} \qquad i=0,1,2,3$$

将表中第一行数据代入得条件分布:

X	0	1	2	3
$P(X=i \mid Y=0)$	1/8	3/8	3/8	1/8

21.求解(3)

当$X=2$时，Y只可能取0与1.将表中第三列数据代入下式

$$P(Y=j\mid X=2)=\frac{P(X=2,Y=j)}{2/9},\quad j=0,1$$

得Y 的条件分布:

X	0	1
$P(Y=j\mid X=2)$	$1/2$	$1/2$

22.二维连续型随机变量的条件分布和条件密度

当 X 连续时，条件分布不能用 $P(X = x_i \mid Y = y_j)$ 来定义，因为

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) \equiv 0$$

而应该用

$$P(X \leq x \mid Y = y)$$

来定义.

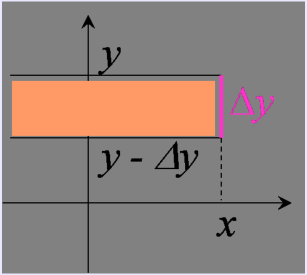
23.条件密度公式推导

设 $\triangle y > 0$

$$P(X \le x \mid y - \triangle y < Y \le y)$$

$$= \frac{P(X \le x, y - \triangle y < Y \le y)}{P(y - \triangle y < Y \le y)}$$

$$= \frac{F(x,y) - F(x, y - \triangle y)}{F_Y(y) - F_Y(y - \triangle y)}$$

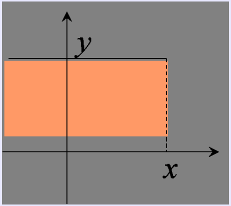


23.条件密度公式推导(续)

$$\lim_{\triangle y\to 0+}\frac{\Big[F(x,y-\triangle y)-F(x,y)\Big]/(-\triangle y)}{\Big[F_Y(y-\triangle y)-F_Y(y)\Big]/(-\triangle y)}$$

$$=\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\frac{dF_Y(y)}{dy}}=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)du}{f_Y(y)}$$

$$=P(X\le x\mid Y=y)$$



24.条件分布函数

若$f(x,y)$ 在点(x,y) 连续，$f_Y(y)$在点y处连续且$f_Y(y)>0$，则称

$$\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\frac{dF_Y(y)}{dy}} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)du}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

为$Y=y$ 时，X的条件分布函数，记作

$$F_{X|Y}(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

25.条件分布函数(续)

称

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为$Y = y$ 的条件下X 的条件$p.d.f.$类似地，称

$$F_{Y|X}(y \mid x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,\nu)}{f_X(x)} d\nu$$

为$X = x$的条件下Y的条件分布函数;称

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

为$X = x$ 的条件下Y的条件$p.d.f.$

26.注意(1)

- $F_{X|Y}(x \mid y), f_{X|Y}(x \mid y)$ 仅是x的函数,y是常数, 对每一$f_Y(y) > 0$ 的y 处, 只要符合定义的条件, 都能定义相应的函数. $F_{Y|X}(y \mid x), f_{Y|X}(y \mid x)$相仿论述.

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= f_X(x) f_{Y|X}(y \mid x) \qquad f_X(x) > 0 \\
&= f_Y(y) f_{X|Y}(x \mid y) \qquad f_Y(y) > 0
\end{aligned}
$$

26.注意(2)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|Y}(x\mid y)f_Y(y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y|X}(y\mid x)f_X(x)dx$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_{Y|X}(y\mid x)f_X(x)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_{X|Y}(x\mid y)f_Y(y)}{f_X(x)}$$

27.例2

已知(X,Y)服从圆域$x_2+y_2\leq r_2$上的均匀分布,求$f_{X|Y}(x\mid y),f_{Y|X}(y\mid x)$

解:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2}, & x_2+y_2<r^2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

由前例知:

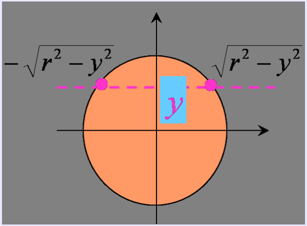
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & -r<x<r\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

同理:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & -r<y<r\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

27.例2(续)

于是由条件分布的定义知：当$r < y < r$ 时，

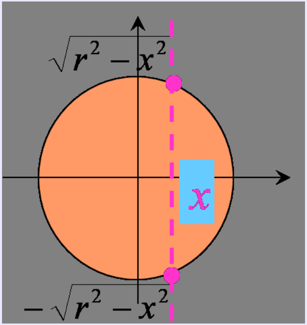


$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}, & -\sqrt{r^2-y^2} < x < \sqrt{r^2-y^2} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$---$这里y是常数，当$Y = y$时，$X \sim U(-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2})$

27.例2(续)

当$r < x < r$ 时，



$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}, & -\sqrt{r^2-x^2} < y < \sqrt{r^2-x^2} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$---$这里x是常数，当$X = x$时，$Y \sim U(-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2})$

28.例3

已知$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$
求$f_{X|Y}(x\mid y)$
解:

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}}$$

28.例3(续)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[(x-\mu_1)-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right]^2}$$

$$f_{X|Y}(x \mid y) \sim N\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$

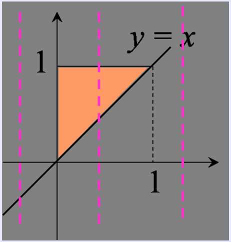
同理,

$$f_{Y|X}(y \mid x) \sim N\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

29.例4

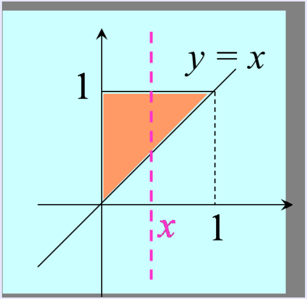
$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

求$f_{X|Y}(x\mid y), f_{Y|X}(y\mid x)$
解:



$$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^1 8xydy, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

29.例4(续)



$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y 8xy\,dx, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4y^3, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

29.例4(续)

当$0<y<1$时，

$$f_{X|Y}(x \mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \frac{2x}{y^2}, & 0\le x\le y \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

当$0<x<1$ 时，

$$f_{Y|X}(y \mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \frac{2y}{1-x^2}, & x\le y\le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

30.随机变量间的独立性

两个r.v. 的相互独立性

定义:设(X,Y)为二维r.v. 若对任何实数x,y 都有

$$P(X<x,Y<y)=P(X<x)P(Y<y)$$

则称$r.v.X$和Y 相互独立

由定义知:二维$r.v.(X,Y)$ 相互独立 $\Longleftrightarrow$

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

$\Longleftrightarrow$

$$P(a<x<b,c<y<d)=P(a<x<b)P(c<y<d)$$

31.随机变量独立的具体表达

离散型 X与Y 独立 $\Longleftrightarrow$ 对一切i,j 有

$$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

即: $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$

连续型 X与Y 独立 $\Longleftrightarrow$ 对任何x,y 有

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (a.e)$$

- 二维随机变量(X, Y) 相互独立, 则边缘分布完全确定联合分布. 二维连续$r.v.(X,Y)$ 相互独立$\Longrightarrow$

$$f_X(x) = f_{X|Y}(x \mid y) \qquad (f_Y(y) > 0)$$

$$f_Y(y) = f_{Y|X}(y \mid x) \qquad (f_X(x) > 0)$$

32.注意

32.注意

- X 与Y是独立的其本质是：任对实数a,b,c,d有

$$P(a<x<b,c<y<d)=P(a<x<b)P(c<y<d)$$

32.注意

- X 与Y是独立的其本质是：任对实数a, b, c, d有

$$P(a < x < b, c < y < d) = P(a < x < b)P(c < y < d)$$

- X 与Y 是独立的，则$g(X)$与$h(Y)$也是独立的.

32.注意

- X 与Y是独立的其本质是：任对实数a, b, c, d有

$$P(a < x < b, c < y < d) = P(a < x < b)P(c < y < d)$$

- X 与Y 是独立的，则$g(X)$与$h(Y)$也是独立的.
- 若联合密度$p(x, y)$ 可分离变量，即

$$p(x, y) = g(x)h(y)$$

则X与Y 独立。

32.注意

- X 与Y是独立的其本质是：任对实数a,b,c,d有

$$P(a<x<b,c<y<d)=P(a<x<b)P(c<y<d)$$

- X 与Y 是独立的，则$g(X)$与$h(Y)$也是独立的.
- 若联合密度$p(x,y)$ 可分离变量，即

$$p(x,y)=g(x)h(y)$$

则X与Y 独立。

- 若(X,Y) 服从二元正态$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 则X与Y 独立的充要条件是

$$\rho=0$$

33.例

(X, Y) 的联合分布列为:

X \ Y	0	1
0	0.3	0.4
1	0.2	0.1

问X与Y 是否独立?

解:边际分布列分别为:

X	0	1
P	0.7	0.3

Y	0	1
P	0.5	0.5

因为$P(X=0, Y=0)=0.3$

$P(X=0)P(Y=0)=0.7\times 0.5=0.35$ 所以不独立

34.例

已知(X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y}, & 0x>0,\ \ y>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

问X 与Y 是否独立?

解: 边际分布密度分别为:

$$p(x)=\begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dy=e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

$$p(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

所以X 与Y 独立,注意: p(x, y) 可分离变量.

35.命题

$(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$ 相互独立 $\Longleftrightarrow \quad \rho = 0$

证:对任何x, y有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

35.命题(续)

取$x = \mu_1, y = \mu_2$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

故

$$\rho = 0$$

将$\rho = 0$代入$f(x, y)$ 即得

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

36.命题

设$f(x,y)$是连续二维$r.v.(X,Y)$的联合$d.f.r(x),g(y)$为非负可积函数，且

$$f(x,y)=r(x)g(y) \quad (a.e)$$

则X,Y相互独立,且

$$f_X(x)=\frac{r(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)dx} \quad (a.e)$$

36.命题(续)

$$f_Y(y) = \frac{g(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy} \quad (a.e)$$

对于分布函数也有类似结果:设$F(x,y)$是二维连续$r.v.(X,Y)$的联合分布函数，则(X,Y)相互独立的充要条件为

$$F(x,y) = R(x)G(y)$$

且

$$F_X(x) = \frac{R(x)}{r(+\infty)}$$

$$F_Y(y) = \frac{G(y)}{G(+\infty)}$$

37.命题

设X,Y 为相互独立的$r.v.u(x),v(y)$ 为连续函数,
则$U=u(X),V=v(Y)$ 也相互独立.即

独立$r.v.$的连续函数仍独立.

38.证明

不妨设(X,Y)是连续型随机向量，

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

因此，$F_{UV}(u,v) = P(U \le u, V \le v)$
$= P(u(X) \le u, v(Y) \le v)$
$= \int\int_{u(x)\le u, v(y)\le v} f_X(x)f_Y(y)dxdy$
$= P(u(X) \le u)P(v(Y) \le v) = F_U(u)F_V(v)$

系：若X,Y 为相互独立的$r.v.$,则$aX+b, cY+d$也相互独立；X_2, Y_2 也相互独立；

39.例

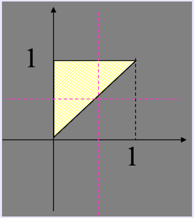
已知(X,Y) 的联合$d.f.$为

$$f_2(x,y)=\begin{cases} 8xy, & 0<x<y, 0<y<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

讨论X,Y 是否独立?

40.解

由图知边缘$d.f.$ 为



$$f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

显然，

$$f_2(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$$

故X, Y 不独立

1.离散型随机变量函数的分布列

设$r.v.X$ 的分布列为

$$P(X=x_k)=p_k, \qquad k=1,2,\ldots$$

由已知函数$g(x)$可求出$r.v.Y$ 的所有可能取值，则Y 的概率分布为

$$P(Y=y_i)=\sum_{k:g(x_k)=y_i} p_k, i=1,2,\ldots$$

2.例

已知X的概率分布为

[redacted]

求$Y = X_2$ 的分布列

解:

[redacted]

3.连续性r.v.函数的分布

已知X的$d.f.$ $f(x)$ 或分布函数,求$Y=g(X)$ 的$d.f.$

方法:

- 从分布函数出发
- 用公式直接求d.f.

4.例

已知X的$d.f.$为$f_X(x), Y=aX+b, a, b$为常数，且$a\neq 0$,求$f_Y(y)$

解:$F_Y(y)=P(Y<y)$
$=P(aX+b<y)$

当$a>0$ 时，

$$F_Y(y)=P\left(X\leq\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$=F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$\Longrightarrow\quad f_Y(y)=\tfrac{1}{a}f_X\left(\tfrac{1}{a}(y-b)\right)$$

4.例(续)

当$a<0$ 时，

$$F_Y(y)=P\left(X>\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$=1-F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

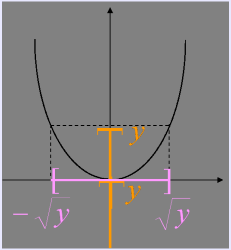
$\Longrightarrow \quad f_Y(y)=-\frac{1}{a}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$ 故

$$f_Y(y)=\frac{1}{|\,a\,|}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

5.例

已知$X \sim N(0,1), Y = X^2$,求$f_Y(y)$

解:从分布函数出发,$F_Y(y) = P(Y < y)$



当$y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0$

当$y > 0$ 时，

$$F_Y(y) = P(X^2 < y)$$

$$= P(-\sqrt{y} < x < \sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

5.例(续)

从而

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), & y > 0 \end{cases}$$

故

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\Big(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\Big), & y > 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}y^{1/2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \end{cases}$$

6.例

$Y=\cos(X)$,X服从区间$(0,2\pi]$的均匀分布
$Y=\cos(X)$在区间$-1<y<1$上有两个反函数, $\rightarrow$
$x_0=\cos^{-1}(y), x_1=2\pi-x_0$

$$\frac{dy}{dx}\,|_{x_0}=-\sin(x_0)=-\sin(\cos^{-1}(y))=-\sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\,|_{x_1}=-\sin(2\pi-x_0)=\sin(x_0)=\sqrt{1-y^2}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}$$

$$\begin{aligned}\therefore f_Y(y)&=\tfrac{1}{2\pi}\tfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}+\tfrac{1}{2\pi}\tfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\\&=\tfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\quad ,\text{若}-1<y<1\end{aligned}$$

6.例(续)

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{-1} f_Y(y)dy + \int_{-1}^{y} f_Y(y)dy \\
&= 0 + \int_{-1}^{y} f_Y(y)dy \\
&= \int_{-1}^{y} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy \\
&= \left[\frac{1}{\pi}\sin^{-1} y\right]_{-1}^{y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sin^{-1} y
\end{aligned}
$$

$$
F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sin^{-1} y}{\pi}, & -1 \le y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}
$$

7.二维随机变量变换

问题:已知二维随机变量(X, Y) 的分布，如何求出$Z = g(X, Y)$的分布?

方法:将与Z有关的事件转化成X，Y的事件。

8.离散与连续情形

- 当(X,Y)为离散$r.v.$时，Z也离散

$$Z = z_k = g(x_{i_k}, y_{j_k})$$

$$P(Z = z_k) = \sum_{g(x_{i_k}, y_{j_k}) = z_k} P(X = x_{i_k}, Y = y_{j_k}) \; k = 1, 2, \ldots$$

- 当(X,Y)为连续$r.v.$时，

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(g(X,Y) < z)$$

$$= \iint_{D_z} f(x,y)dxdy$$

其中$D_z : \{(x,y) \mid g(x,y) < z\}$

9.例

设X与Y 独立，且X,Y 等可能地取值0,和1.
求$Z=max(X,Y)$的分布列.
解:

X	0	1
P	1/2	1/2

Y	0	1
P	1/2	1/2

$Z=max(X,Y)$的取值为$:0,1$
$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)=P(X=0)(Y=0)=1/4$
$P(Z=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=3/4$

10.极值分布

设$X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$, 独立同分布，其分布函数和密度函数分别为$F_X(x)$ 和$p_X(x)$.

若记$Y = max(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n), Z = min(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$

- 则Y 的分布函数为:$F_Y(y) = [F_X(y)]^n$
- Y 的密度函数为:$p_Y(y) = n[F_X(y)]^{n-1}p_X(y)$
- Z 的分布函数为:$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^n$
- Z 的密度函数为:$p_Z(z) = n[1 - F_X(z)]^{n-1}p_X(z)$

11.极值分布推导

设连续随机变量X, Y 相互独立，
$X \sim F_X(x), Y \sim F_Y(y), M = max\{X, Y\}, N = min\{X, Y\}$,
求M, N 的分布函数.

$$F_M(u) = P(max\{X, Y\} < u)$$

$$= P(X < u, Y < u)$$

$$= P(X < u)P(Y < u)$$

$$= F_X(u)F_Y(u)$$

11.极值分布推导(续)

$$F_N(\nu) = P(min\{X,Y\} < \nu)$$

$$= 1 - P(min\{X,Y\} > \nu)$$

$$= 1 - P(X \geq \nu, Y \geq \nu)$$

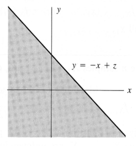
$$= 1 - P(X \geq \nu)P(Y \geq \nu)$$

$$= 1 - [1 - F_X(\nu)][1 - F_Y(\nu)].$$

12.和的分布

$Z = X + Y$，求$F_Z(z)$ 和$f_Z(z)$

$$F_Z(z) = P[Z < z] = P[X + Y < z]$$



$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x'} f_{X,Y}(x', y')dy'dx'$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x', z - x')dx'$$

如果X 和Y 相互独，则

$\rightarrow \mathrm{f}_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x')f_Y(z - x')dx'$

12.和的分布(续)

设离散随机变量X与Y独立，则$Z=X+Y$的分布列为

$$P(Z=z_l)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i)P(Y=z_l-x_i)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=z_l-y_j)P(Y=y_j)$$

13.卷积公式的应用

设X与Y 是独立同分布的标准正态变量，求$Z = X + Y$的分布.

解:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(z-x)^2}{2}\right\}$$

$$= \ldots \cdots = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{z^2}{2\times 2}\right\}$$

所以

$$Z = X + Y \sim N(0, 2).$$

14.独立正态变量的线性组合仍为正态变量

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$. 且$X_i$ 间相互独立, 实数$a_1, a_2, \ldots, a_n$不全为零, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

15. 例

设X 与Y 相互独立，且$X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p)$
则

$$X + Y \sim B(n+m, p)$$

证$Z = X + Y$的可能取值为:$0, 1, 2, \ldots, n+m$

$$P(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-j)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-j)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} C_m^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i}$$

$$\overset{\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i} = C_{n+m}^k}{=} C_{n+m}^k p^k (1-p)^{n+m-k}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n+m$ 所以$X + Y \sim B(n+m, p)$

16. 问题三

已知(X, Y) 的分布，考虑(X, Y) 的函数

$$\begin{cases} U = g_1(X, Y) \\ V = g_1(X, Y) \end{cases}$$

求(U, V) 的分布.

17. 随机向量变换公式

若$\begin{cases} u = g_1(x,y) \\ v = g_1(x,y) \end{cases}$有连续偏导、存在反函数$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

则(U,V)的联合密度为

$$p_{UV}(u,v) = p_{XY}(x(u,v), y(u,v)) \mid J \mid$$

其中J为变换的雅可比行列式:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$$

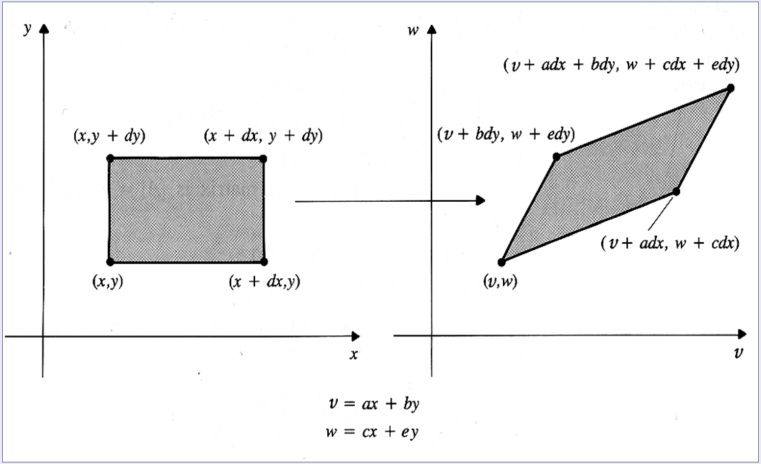
17. 二维随机向量的线性变换:

$$\begin{matrix} V = aX + bY \\ W = cX + dY \end{matrix}, \quad \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \mid ae - bc \mid \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

17. 二维随机向量的线性变换(续)



17. 二维随机向量的线性变换(续)

$$f_{X,Y}(x,y)dxdy \overset{\sim}{=} f_{V,W}(v,w)dP$$

dP : 平行四边形的面积

$$f_{V,W}(v,w) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\mid \frac{dP}{dxdy} \mid}, \mid \frac{dP}{dxdy} \mid = \frac{\mid ae - bc \mid dxdy}{dxdy} = \mid ae - bc \mid = \mid A \mid$$

一般情形: $Z = AX$

$$f_Z(z) = \frac{f_X(A^{-1}z)}{\mid A \mid}$$

18.例

X, Y：相互独立的标准正态分，定义:

$$\begin{aligned} V &= (X^2 + Y^2)^{1/2} \\ W &= \arctan(X/Y) \end{aligned}$$

求:(V, W)的联合分布密度解: $x = v\cos w, y = v\sin w$

$$J(v,w) = \left| \begin{array}{cc} \cos w & -v\sin w \\ \sin w & v\cos w \end{array} \right| = v$$

18.例(续)

$$f_{V,W}(v,w) = f_{X,Y}(x(v,w),y(v,w))|\ J(v,w)\ |$$

$$= \frac{v}{2\pi} e^{-(v^2\cos^2 w + v^2 \sin^2 w)/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} v e^{-v^2/2} \quad v \geq 0, 0 \leq w \leq 2\pi$$

$$f_V(v) = ve^{-v^2/2} \ \ v \geq 0 \Longrightarrow$$

V:Rayleigh 随机变量
W:$(0,2\pi)$上的均匀分布

19.增补变量法

若要求$U=g_1(X,Y)$的密度$p_U(u)$，可增补一个变量$V=g_2(X,Y)$，先用变量变换法求出(U,V)的联合密度$p_{UV}(u,v)$，然后再由联合密度$p_{UV}(u,v)$，去求出边际密度$p_U(u)$

用此方法可以求出卷积公式、积的公式、商的公式

20.商的分布

已知(X,Y)的联合$d.f.f(x,y)$，令$Z=X/Y$,求$f_Z(z)$

$$\begin{cases} Z=X/Y \\ V=Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=ZV \\ Y=V \end{cases} \Rightarrow \mid J \mid = \mid v \mid$$

$$f_{ZV}(z,v)=f(zv,v)\mid v \mid$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_ZV(z,v)dv=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zu,v)\mid v \mid dv$$