《概率论》补充习题第三章

复旦大学《概率论》国家精品课程课题组

2013年3月1日

第三章：随机变量与分布函数

1. 设随机变量X的分布函数为
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a\sin x, & 0\le x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2,\end{cases}$$
则$a=$______, $P(|X|<\pi/6)=$______.

2. 设连续型随机变量X的概率密度函数为$f(x)=ae^{-|x-1|}$, $-\infty<x<\infty$, 则常数$a=$______, $P(X>0)=$______.

3. 设随机变量$X\sim B(2,p)$, 随机变量$Y\sim B(3,p)$. 若$P(X\ge 1)=5/9$, 则$P(Y\ge 1)=$______.

4. 设随机变量$X\sim N(2,\sigma^2)$, 且$P(2<X<4)=0.3$, 则$P(X<0)=$______.

5. 设随机变量X的概率密度函数为
$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$
且$P(X>0.5)=0.625$, 则$a=$______, $b=$______, $P(0.25<X<0.5)=$______.

6. 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则随σ的增大,概率$P\{|X-\mu|<\sigma\}$(　　).

   A. 单调增加

   B. 单调减小

   C. 保持不变

   D. 增减不定

7. 设随机变量X的概率密度函数为$f(x)$, 分布函数为$F(x)$, 若$f(-x)=f(x)$, 则对于任意实数a, 总有(　　).

A. $F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$

B. $F(-a)=0.5-\int_0^a f(x)dx$

C. $F(-a)=F(a)$

D. $F(-a)=2F(a)-1$

8. 设随机变量$X\sim N(0,1)$,对给定的$0<a<1$,数Z_α满足$P\{X>Z_\alpha\}=\alpha$. 若$P\{|X|>x\}=\alpha$, 则x等于(　　).

   A. $Z_{\alpha/2}$

   B. $Z_{1-\alpha/2}$

   C. $Z_{(1-\alpha)/2}$

   D. $U_{1-\alpha}$

9. 10件产品中8件为一等品,2件为二等品.不放回地抽取产品,每次抽一件,直到取到一等品为止. 记X为抽样次数.求X的概率分布与分布函数.

10. 抽样调查结果表明:某地区考生的外语成绩(百分制)服从正态分布,平均成绩72分,96分以上者占总人数的2.3%, 求考生的外语成绩在60分至84分之间的概率.

11. 某人家住市区东郊,工作单位在西郊,上班有两条路线可选择:一条直穿市区,路程近, 但塞车现象严重,所需时间(单位:分钟)服从正态分布$N(30,10^2)$;另一条是环城公路,路程远,但很少塞车, 所需时间服从正态分布$N(40,4^2)$.为保证以较大概率上班不迟到,问:

    1. 如上班前50分钟出发,应选哪条路线?
    2. 如上班前45分钟出发,应选哪条路线?

12. 有90台同类型设备,各台设备的工作相互独立,发生故障的概率均为0.01, 且一台设备的故障由一名设备维修人员能够处理.配备维修人员的方法有两种:一种是3名维修人员单独工作, 每人负责30台设备的维修;另一种是3名维修人员联合工作,共同负责90台设备的维修.试比较两种设备维修人员方法的优劣.

13. 已知离散型随机变量X的概率分布为

X	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
p	0.3	0.2	0.4	0.1

求下列随机变量Y的概率分布:

1. $Y=(2X-\pi)^2$;
2. $Y=\cos(2X-\pi)$.

14. 设随机变量X的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x/\pi^2, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$Y=\sin X$ 的概率密度函数$f_Y(y)$.

15. 设随机变量X和Y相互独立,概率分布分别为

X	-1	1
$P\{X=x_i\}$	0.5	0.5

,

Y	-1	1
$P\{Y=y_i\}$	0.5	0.5

则$P\{X=Y\}=$_____.

16. 设二维随机向量(X,Y)的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\ge 0, y\ge 0\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则$P\{1<X\le 2,\quad 3<Y\le 5\}=$_____.

17. 设二维连续性随机向量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则$P\{X+Y\le 1\}=$_____.

18. 从1,2,3,4中任取一个数,记为X;再从1,...,X中任取一个数,记为Y,则P$\{Y=2\}=$ _____.

19. 设X和Y为两个随机变量,且

$$P\{X\ge 0,Y\ge 0\}=\frac{3}{7},P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=\frac{4}{7},$$

则$P\{\max(X,Y)\ge 0\}=$_____.

20. 设平面区域D由曲线$y=1/x$及$y=0,x=1,x=e^2$所围成,二维随机向量(X,Y)在区域D上服从均匀分布, 则X的边缘概率密度函数在x=2处的值为_____.

21. 袋中装有同型号小球10只,其中7只红球,3只白球.现从袋中随机取球两次,每次取一球,取后不放回. 令

$$X=\begin{cases}1, & \text{若第一次取到白球},\\ 0, & \text{若第一次取到红球}\end{cases},Y=\begin{cases}1, & \text{若第二次取到白球},\\ 0, & \text{若第二次取到红球}\end{cases}$$

   1. 求(X,Y)的联合概率分布;

2. 计算$P\{X \geq Y\}$.

22. 将一枚硬币连掷三次,以X表示三次中出现正面的次数,以Y表示三次中出现正面次数与反面次数差的绝对值.求:

1. (X, Y)的联合概率分布;
2. X和Y的边缘概率分布;
3. 在$Y = 1$的条件下X的条件概率分布.

23. 设二维随机向量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} a(R - \sqrt{x^2 + y^2}), & x^2 + y^2 < R^2, \\ 0, & x^2 + y^2 \geq R^2. \end{cases}$$

1. 确定常数a;
2. 计算随机点(X,Y)落在圆域$x^2 + y^2 \leq r^2 (r < R)$内的概率.

24. 二维随机向量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}(1 + \sin x \sin y), -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty,$$

求X与Y的边缘概率密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$.

25. 设随机向量(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x, y) = a(b + \arctan \frac{x}{2})(c + \arctan \frac{y}{3}).$$

1. 确定常数a,b,c;
2. X和Y是否相互独立?
3. 求(X, Y)的概率密度函数$f(x, y)$和边缘概率密度函数$f_X(x), f_Y(y)$.

26. 设某班车在起点站上车的人数X服从参数为$\lambda(\lambda > 0)$的泊松分布,每位乘客在途中下车的概率为$p(0 < p < 1)$,且中途下车与否相互独立.以Y表示中途下车的人数.

1. 求在发车时有n位乘客的条件下,中途有m位下车的概率;
2. 写出随机向量(X, Y)的概率分布.

27. 已知随机向量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

1. 求X,Y的边缘概率密度函数$f_X(x), f_Y(y)$;

2. 计算$P\{Y \le 0.5|X \le 0.5\}$.

28. 设X, Y是相互独立的随机变量,概率密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}, \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0, \end{cases}$$

其中$\lambda > 0, \mu > 0$为常数引入随机变量

$$Z = \begin{cases} 1, & X \le Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

1. 求条件概率密度函数$f_{X|Y}(x|y)$;
2. 求Z的概率分布.

29. 设随机向量(X, Y)是正方形$G = \{(x, y)|1 \le x \le 3, 1 \le y \le 3\}$ 上的均匀分布,求随机变量$U = |X - Y|$的概率密度函数$f_U(u)$.

30. 设随机变量X, Y相互独立,X的概率分布为

$$P\{X = 1\} = 0.3, \qquad P\{X = 2\} = 0.7,$$

Y的概率密度函数为f(y),求随机变量$U = X + Y$的概率密度函数$g(u)$.

31. 设随机变量X服从区间$(0, 1)$上的均匀分布,在$X = x(0 < x < 1)$的条件下,随机变量Y服从区间$(0, x)$上的均匀分布.求

1. (X, Y)的联合概率密度函数;
2. Y的概率密度函数;
3. $P\{X + Y > 1\}$.

32. 设随机向量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 < x < 1, 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

1. 求X, Y的边缘概率密度;
2. 求X, Y的条件概率密度;
3. 计算$P\{X + Y > 1\}$与$P\{Y < 0.5|X < 0.5\}$.

33. 设随机变量X_1, X_2, X_3相互独立,且均服从参数为$\lambda = 1, \mu = 0$的柯西分布,即概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, -\infty < x < \infty.$$

1. 求$M=\max\{X_1,X_2,X_3\}$和$N=\min\{X_1,X_2,X_3\}$的概率密度函数;
2. 计算$P\{0<M\le 1\}$和$P\{N>1\}$.

34. 设X在(2,5)中均匀分布,对X进行三次独立观测时,求观测值大于3的次数大于等于两次的概率.

35. 设X服从参数是λ的泊松分布,求$p_k=P(X=k)$的最大值点k.

36. 在核反应中,假设一个粒子分裂成i个新粒子的概率是p_i,$p_1+p_2+p_3=1$.粒子之间的分裂是相互独立的并且有相同的概率分布.求一个粒子两次分裂后成为3个粒子的概率.

37. 设$P(X=a)=p,P(X=b)=1-p$.求常数c,d,使得$Y=cX+d\sim B(1,p)$.

38. 设T是表示寿命的非负随机变量,有连续的概率密度$f(x)$.引入T的生存函数$S(x)=P(T\ge x)$和失效率函数$\lambda(t)=f(t)/S(t)$.证明:

$$S(x)=\exp\left(-\int_0^x\lambda(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

39. 设电流I在$8A$至$9A$之间均匀分布.当电流通过2Ω的电阻时,消耗的功率为$W=2I^2$ W,求W的密度.

40. 设X是随机变量,$\ln X\sim N(\mu,\sigma^2)$.证明$X$有概率密度

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left(-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\qquad x>0.$$

这时称X服从对数正态分布(lognormal distribution).

41. 设X,Y独立,$X\sim B(1,p),Y\sim\varepsilon(\lambda)$,求$Z=X+Y$的分布函数和概率密度.

42. 设X有概率密度

$$f(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)},x\ge 0.$$

求$Y=\ln X$的密度.

43. 设a,b,c是常数,$a\neq 0$,如果随机变量X有概率密度$f(x)=\exp(ax^2+bx+c)$,证明X服从正态分布.

44. 对一大批产品的验收方案如下:从中任取10件检验,无次品就接受这批产品,次品超过两件就拒收.遇到其他情况用下述方案重新验收:从中抽取5件产品,这5件无次品就接受,有次品时拒收.设产品的次品率是10%,计算:

(a) 第一次检验产品被接受的概率,

(b) 需要做第二次检验的概率,

(c) 第二次检验产品才被接受的概率,

(d) 产品被接受的概率.

45. 设一条金鱼的产卵数服从泊松分布

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, ..., \lambda\text{是正常数},$$

每只卵孵化成鱼的概率是$p(> 0)$.如果卵能否孵化成鱼是相互独立的,求一条金鱼有m条后代小鱼的概率.

46. 设点随机地落在中心在原点,半径为R的圆周上.求落点横坐标的概率密度.

47. 一个房间有三扇完全相同的玻璃窗,其中只有一扇是打开的.两只麻雀飞入房间后试图飞出房间.

(a) 第一只麻雀是无记忆的,求它飞出房间时试飞次数X的分布,

(b) 第二只麻雀是有记忆的,求它飞出房间时试飞次数Y的分布,

(c) 计算$P(X < Y), P(X > Y)$.

48. 设X有概率密度$f(x) = cx/\pi^2, x \in (0, \pi)$.求$Y = \sin X$的密度.

49. 设X, Y独立,分别服从二项分布$B(n, p)$和$B(m, p)$.

(a) 计算条件概率$P(X = k|X + Y = n), k = 0, 1, ..., n$,

(b) 给出条件$X + Y = n$下,X的分布.

50. 设$X \sim U(0, 6\pi)$,求$Y = R\cos X$的概率密度.

51. 求救者每间隔2min发出一次瞬间呼叫,救援者在收到呼叫信号的范围内至少停留多长时间才能以0.95的概率收到呼叫.

52. (1) 设连续函数满足$f(x+y) = f(x)+f(y), x, y > 0$,则有常数$a$使得$f(x) = ax, x \geq 0$,

(2) 如果连续函数$g(x)$满足$g(x + y) = g(x)g(y), x, y > 0$,则有常数$b$使得$g(x) = e^{bx}, x \geq 0$.

53. 设(X, Y)有联合分布

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}), & x, y \geq 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

证明:有在第一象限$D = \{(x, y)|x, y > 0\}$中的连续函数$f(x, y)$使得对任何$(a, b) \in D$,

$$P(x \leq a, y \leq b) = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

54. 对于上题中的随机向量(X,Y),计算$F_X(x)=P(X\le x),F_Y(y)=P(Y\le y)$,证明:$X,Y$独立.

55. 设随机向量$(X_1,X_2,...,X_\tau)$服从多项分布

$$P(X_1=k_1,X_2=k_2,...,X_\tau=k_\tau)=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_\tau!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_\tau^{k_\tau},$$

其中$k_i\ge 0,\sum_{i=1}^{\tau}k_i=n$.对$1\le k\le\tau$,求$Y=X_1+X_2+...+X_k$的概率分布.

56. 设离散随机向量(X,Y)有如下的概率分布.

X	1	2	3	4	5
1	0.06	0.05	0.04	0.01	0.02
2	0.05	0.10	0.10	0.05	0.03
3	0.07	0.05	0.01	0.02	0.02
4	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03
5	0.05	0.06	0.05	0.02	0.02

(a) 求X,Y的边缘分布,

(b) 求$U=\max(X,Y)$的分布,

(c) 求$V=\min(X,Y)$的分布,

(d) 计算$P(X=2|Y=3)$.

57. 设(X,Y)有联合密度$f(x,y),a,b$是非零常数,c是常数,已知$aX+bY=c$的条件下,(X,Y)有联合密度吗?

58. 如果X是连续型随机变量,Y是离散型随机变量,X和Y独立,则对任何常数$c,P(X=Y+c)=0$.

59. 证明:$X_1,X_2,...,X_n$相互独立的充分必要条件是对任何$(x_1,x_2,...,x_n)$,有

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=F_1(x_1)F_2(x_2)...F_n(x_n).$$

60. 设a是常数,(X,Y)有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}ax^2y, & x^2<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求X,Y的边缘密度,证明X,Y不独立.

61. 设随机变量X,Y都只取值-1,1,满足

$$P(X=1)=1/2,P(Y=1|X=1)=P(Y=-1|X=-1)=1/3.$$

(a) 求(X,Y)的联合分布,

(b) 求t的方程$t^2+Xt+Y=0$有实根的概率.

62. 设随机向量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}C(R-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\le R^2\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(a) 求常数C,

(b) 当$R=2$时,随机向量(X,Y)落在以原点为圆心,以$r=1$为半径的区域内的概率是多少?

63. 设$A_1,A_2,...,A_n$是试验S的完备事件组,$p_i=P(A_i)$,对试验S进行n次独立重复试验时, 用X_i表示A_i发生的次数,$i=1,2,...,n$.证明:随机变量$X_1,X_2,...,X_n$不是相互独立的.

64. 设X在(0,1)上均匀分布,已知$X=x$时,Y在(x,1)中均匀分布.求条件密度$f_{Y|X}(y|x)$.

65. 设随机变量X,Y独立,X有概率密度函数$f(x)$,Y有离散分布

$$P(Y=a_i)=p_i>0,\quad i=1,2,...,$$

证明:若$a_1,a_2,...$都不为0,则$Z=XY$有密度函数

$$h(z)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_i}{|a_i|}f\left(\frac{z}{a_i}\right),$$

若有某个$a_i=0$,则XY没有概率密度函数.

66. X,Y都是连续型随机变量,(X,Y)是连续型随机向量吗?$X+Y$是连续型随机变量吗?

67. 如果随机向量(X,Y)有如下的概率分布:

$$P(X=i,Y=1/i)=c,\quad i=1,2,...,8.$$

确定常数c,并求X,Y的概率分布.

68. 设X,Y独立同分布,证明:

$$P(a<\min(X,Y)\le b)=P^2(X>a)-P^2(X>b).$$

69. 设(X,Y)在椭圆

$$D=\left\{(x,y):\frac{(x+y)^2}{8}+\frac{(x-y)^2}{2}\le 1\right\}$$

内均匀分布,求联合密度.

70. 设随机向量(X,Y)有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}a(6-x-y), & 0<x<2, \quad 2<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求a; $P(X\le 1, Y\le 3)$; $P(X+Y\le 1.5)$; $P(X+Y\le 4)$.

71. 设X,Y独立,$X\sim\varepsilon(\lambda)$, $Y\sim\varepsilon(\mu)$,计算$P(X>Y)$.

72. 设X,Y独立,$X\sim\varepsilon(\lambda)$, $Y\sim\varepsilon(\mu)$. 求$\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$的概率密度.

73. 设(X,Y)有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求X,Y的边缘密度.

74. 设(X,Y)有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, \quad x\in(0,1),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求条件密度$f_{Y|X}(y|x)$, $f_{X|Y}(x|y)$.

75. (X,Y)有联合密度$f(x)g(y)$,(U,V)有联合密度

$$p(u,v)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha}f(u)g(v), & u\ge v,\\ 0, & u<v.\end{cases}$$

(a)求U,V的边缘密度, (b)证明$\alpha=P(X\ge Y)$.

76. 设X,Y独立,且都在(0,1)上均匀分布,计算$Z=X+Y$的概率密度.

77. 设$p\in(0,1), 0<\alpha<(1-p)/p$.如果一个家庭有$n$个小孩的概率

$$p_x=\begin{cases}\alpha p^n, & n\ge 1,\\ 1-\alpha p/(1-p), & n=0.\end{cases}$$

设男婴和女婴的出生是等可能的,求一个家庭有k个男孩的概率.

78. 设X在(0,1)上均匀分布,已知$X=x$时,Y在(x,1)中均匀分布.求(X,Y)的联合密度$f(x,y)$和Y的边缘密度$f_Y(y)$.

79. 设一昆虫有$n(>0)$个后代,假设每个后代昆虫的寿命是相互独立的且都服从参数是β的指数分布.

(a)求这n个昆虫中寿命最长的那条虫的寿命的概率分布,

(b)求这n个昆虫中寿命最长的那条虫的寿命的概率分布.

80. 设(X,Y)有联合密度$f(x,y)$, $U=aX+bY$, $V=cX+dY$,其中的常数a,b,c,d使得矩阵

$$A \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

满秩,则(U,V)有联合密度

$$g(u,v)=\frac{1}{|det(A)|}f(x,y),\text{其中}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$