《概率论》补充习题第五章

复旦大学《概率论》国家精品课程课题组

2013年3月1日

第五章：极限定理

1. 若随机变量X服从区间[-1,b]上的均匀分布,且有切比雪夫不等式得$P\{|X-1|<\varepsilon\}\geq 2/3$,则$b=$______,$\varepsilon=$______.

2. 设$X_1,X_2,...,X_n$是独立同分布的随机变量序列,且X_1服从参数为λ的指数分布,则

$$\lim_{n\to\infty} P\Big\{\frac{\lambda\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x\} = \_\_\_\_\_\_.$$

3. 设$X_1,X_2,...$是独立同分布的随机变量序列,且它们的数学期望为0,方差为σ^2, 则随机变量序列$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2$依概率收敛于______.

4. 设$X_1,X_2,...,X_{500}$是独立同分布的随机变量,且$X_1\sim B(1,p)$,则下列不正确的为( ).

   A. $\frac{1}{500}\sum_{i=1}^{500} X_i \overset{\mathrm{P}}{\approx} p$;

   B. $\sum_{i=1}^{500} X_i \sim B(500,p)$;

   C. $P\{a<\sum_{i=1}^{500} X_i<b\}\approx\phi(b)-\phi(a)$;

   D. $P\{a<\sum_{i=1}^{500} X_i<b\}\approx\phi(\frac{b-500p}{\sqrt{500p(1-p)}})-\phi(\frac{a-500p}{\sqrt{500p(1-p)}})$.

5. 设$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量序列,在(   )条件下,X_n不服从切比雪夫大数定律.

   A. X_n的概率分布为$P\{X_n=k\}=\frac{1}{ek!}, k=0,1,2,...$;

   B. X_n服从区间$[a,b]$上的均匀分布,$a<b$;

   C. X_n的概率密度函数为$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty<x<\infty$;

   D. X_n的概率密度函数为

$$g(x)=\begin{cases}\frac{3}{x^4}, & x\geq 1,\\ 0, & x<1.\end{cases}$$

6. 设随机变量$X_1, X_2, ..., X_n, ...$相互独立同分布,均服从U(0,1),证明:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)^{1/n} \xrightarrow{\mathrm{P}} c, n \to \infty$$

其中c为常数,并求出c的值.

7. 设随机变量序列$X_1, X_2, ..., X_n, ...$两两互不相关,具有有限的期望与方差,且存在一个与n无关的常数c,使得$Var(X_n) \leq c, n = 1, 2, ...$,证明:对任意给定的$\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)|\right) = 0,$$

即$X_1, X_2, ..., X_n, ...$ 服从大数定律.

8. 设一条自动生产线的产品合格率是0.8,要使一批产品的合格率在0.76与0.84之间的概率不小于0.9,问这批产品至少要生产多少件?

9. 某保险公司多年统计资料表明,在索赔户中被盗索赔户占20%,以X表示在随意抽查的100个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数,

    (1) 写出X的概率分布;

    (2) 利用棣莫弗-拉普拉斯定理,求被盗索赔户不少于14户且不多于30户的概率的近似值.

10. 某厂生产的产品平均寿命为2000小时,标准差为250小时.进行技术改造后, 平均寿命提高到2250小时,标准差不变.为了确认这一成果,检验的方法是:任意选取若干件产品进行测试, 若产品平均寿命超过2200小时,就确认技术改造成功.要使检验通过的概率超过0.997,至少应检验多少件产品?

11. 计算机进行数字计算时遵从四舍五入的原则.为简单计,现对小数点后面第一位进行舍入计算, 则误差可以认为服从[-0.5,0.5]上的均匀分布.假定各次运算误差是相互独立的.试求:

    1. 进行n次运算,误差总和的绝对值不超过给定正数a的概率;并计算当n=27,a=2时此概率的近似值;
    2. 最多进行多少次运算可使误差总和的绝对值不超过10的概率不小于95%?
    3. 进行n次计算,平均误差的绝对值小于给定正数ε的概率,并计算当$n = 75, \varepsilon = 0.05$时,此概率的近似值.

12. 一生产线生产的产品成箱包装,每箱的重量是随机的,假设每箱平均重50kg,标准差5kg, 若用最大载重量为5000kg汽车承运,试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于0.977($\Phi(2) = 0.977$).

13. 设$X_1, X_2, ..., X_n$是独立同分布的随机变量,已知$E(X^k) = \alpha k(k = 1, 2, 3, 4)$, 证明当n充分大时,随机变量$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$近似服从正态分布,并指出其分布参数.

14. 设$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N(\mu, \Sigma)}$,给出$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{\alpha}$服从的分布.

15. 设n维随机向量$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N(\mu, \Sigma)}$,$\boldsymbol{\Sigma}$正定,求$Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$服从的分布.

16. 设$X_1, X_2, ..., X_n$独立同分布,都服从$N(\mu, \sigma^2)$分布,
(1)求$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$的分布,
(2)求S_n/n的分布,
(3)求$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n$的分布.

17. 设X, Y独立,$X \sim (\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim (\mu_2, \sigma_2^2)$. 求$Z = a + bX + cY$的分布.

18. 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,证明$Y = (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$.

19. 设$\{X_k\}$独立同分布,有共同的数学期望μ,证明$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 的依概率增长速度是n,即对任何$\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P(n(\mu - \varepsilon) \le S_n \le n(\mu + \varepsilon)) = 1.$$

20. 设$\{X_n\}$独立同分布,有共同的数学期望μ和方差σ^2.证明

$$n^{1/3}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

21. 设X_n服从参数$\lambda_n(> 0)$的Poisson分布:

$$P(X_n = k) = \lambda_n^k e^{-\lambda_n}/k!, k = 0, 1, ...$$

当$\lambda_n = n\lambda$,证明:

$$\frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, 1).$$

22. 设某一个年龄段的男性身高Y服从正态分布$N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$,在已知$Y = y$的条件下,体重X服从正态分布$N(ay + b, \sigma_X^2)$,其中$a(> 0), b$是常数.
(a)求(Y, X)的联合密度,
(b)求体重X的密度.

23. 设X_n独立同分布,有共同的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

计算概率1意义下的极限$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

24. 设$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. 求$(X + Y)$和$(X - Y)$独立的充分必要条件.

25. 设$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})^{T}\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$,其中

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix},\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}8&3&2\\3&4&1\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

求X,Y和$X+Y,X-Y$的密度.

26. 某计算机平均每天上网5小时,标准差是4小时,求一年内上网的时间小于1700小时的概率.

27. 某学校学生上课的出勤率是97%,全校有5000名学生上课时,求出勤人数少于4880的概率.

28. 设选民中赞同某候选人的比例$p\in(0.01,0.99)$. 该候选人委托一调查公司对p进行调查.
(a)为了以99%的把握保证p的预测误差不超过1%,应要求调查多少选民?
(b)如果调查一个选民的费用是3元,调查公司的调查费用应当是多少?

29. 设X是随机变量,对正数$a>0$和$c=Ee^{aX}<\infty$,证明$P(X>x)\le ce^{-ax}$.

30. 设$\{X_k\}$是独立同分布的随机序列,$\mu_m=EX_1^m,\mu_{2m}=EX_1^{2m}<\infty$. 写出关于$\{X_k^m;k=1,2,...\}$的弱大数律,强大数律和中心极限定理.