《概率论》补充习题第四章

复旦大学《概率论》国家精品课程课题组

2013年3月1日

第四章：数字特征与特征函数

1. 设随机变量X服从参数为2的泊松分布,则随机变量$Y=3X-2$的期望$E(Y)=$______, 方差$Var(Y)=$______.

2. 设随机变量X服从参数为1的指数分布,则$E(X+e^{-2X})=$______.

3. 设随机变量X与Y的相关系数为0.5,且$E(X)=E(Y)=0, E(X^2)=E(Y^2)=2$,则$E(X+Y)^2=$______.

4. 设随机变量X和Y独立同分布,记$U=X-Y, V=X+Y$,则随机变量U与V的相关系数$\rho_{UV}=$______.

5. 设随机变量Y服从参数$\lambda=1$的指数分布,另

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\le k,\\ 1, & Y>k, k=1,2,\end{cases}$$

则$E(X_1+X_2)$=______.

6. 设X_1,X_2,X_3均服从[0,2]上的均匀分布,则$E(3X_1-X_2+2X_3)=$(　　).

   A. 4

   B. 3

   C. 1

   D. 2

7. 已知随机变量X服从二项分布,且$E(X)=2.4, Var(X)=1.44$,则n,p的值为(　　).

   A. $n=4,p=0.6$;

   B. $n=6,p=0.4$;

   C. $n=8,p=0.3$;

D. $n=24, p=0.1$.

8. 假设一部机器在一天内发生故障的概率为0.2,且一旦发生故障就全天停止工作,按一周5个工作日计算,如果不发生故障,可获利润10万元,如果只发生1次故障仍可获利润5万元,如果发生2次故障不获利润也不亏损, 如果发生3次或3次以上故障就要亏损2万元,求一周内利润的期望值.

9. 将编号为1到n的n个球随机地放进编号为1到n的n个盒子中,一个盒子装一个球. 若球装入与其同号的盒子中,称为一个配对,记配对总数为X,求$E(X)$与$Var(X)$.

10. 100名战士参加实弹射击练习,设每名战士每次射击后的命中率为0.8,规定每名战士至多射击4次,若已射中则不再射击.问:该次练习至少应该准备多少发子弹?

11. 某地有A,B两队进行乒乓球比赛,规定一方先胜三盘则比赛结束.设每场比赛A队获胜的概率$p=0.5$,以X记比赛的盘数,求$E(X)$.

12. 设随机变量X的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^n e^{-x}}{n!}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

求X的期望$E(X)$与方差$Var(X)$.

13. 设随机变量$X\sim N(0,\sigma^2)$,求$E(X^n)$.

14. 设随机变量$X\sim U(0,1), Y\sim U(1,3)$,且$X$与$Y$相互独立,求$E(XY)$与$Var(XY)$.

15. 设随机变量X与Y相互独立,且都服从均值为0,方差为0.5的正态分布, 求随机变量$|X-Y|$的方差.

16. 设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty<x<\infty$,

    (1) 求X的期望$E(X)$,方差$Var(X)$;

    (2) 求X与$|X|$的协方差,并问X与$|X|$是否不相关?

    (3) 问X与$|X|$是否相互独立?为什么?

17. 设随机变量X, Y独立同分布,且方差存在.令$U=\alpha X+\beta Y, V=\alpha X-\beta Y$,其中$\alpha,\beta$是不全为零的常数,证明:

$$\rho_{UV}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

18. 设二维随机向量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\cos x\cos y, & 0\leq x,y\leq\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求(X,Y)的协方差矩阵.

19. 设A,B是随机试验E的两个事件,且$P(A) > 0, P(B) > 0$.随机变量X和Y的定义为

$$X = \begin{cases} 1, & \text{A发生}, \\ 0, & \text{A不发生}. \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{B发生}, \\ 0, & \text{B不发生}. \end{cases}$$

证明:若$\rho_{XY} = 0$,则X与Y相互独立.

20. 设随机变量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y), & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求:
(1)常数k;
(2)$Var(2X - 3Y + 5)$;
(3)相关系数ρ_{XY}
(4)判断X和Y是否相互独立.

21. 设随机变量$X_1, X_2, ..., X_n$独立同分布,且概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \le \theta, \end{cases}$$

其中$\theta > 0$是常数,求$Z = \min X_1, X_2, ..., X_n$的期望和方差.

22. 设随机向量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = 0.5[\phi_1(x, y) + \phi_2(x, y)],$$

其中$\phi_1(x, y)$和$\phi_2(x, y)$都是二维正态分布的联合概率密度函数,它们对应的二维随机向量的相关系数分别为与; 它们的边缘概率密度函数所对应的随机变量的数学期望都是0,方差都是1.

(1) 求随机变量X和Y的边缘概率密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$,及X和Y的相关系数ρ_{XY}(可以直接利用二维正态分布联合密度函数的性质);

(2) 求X和Y是否独立?为什么?

23. 设随机变量$X_1, X_2, ..., X_n (n > 2)$独立同分布,且$X_1 \sim N(0, 1)$,记$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1, 2, ..., n$.求:

(1) Y_i的方差$Var(Y_i), i = 1, 2, ..., n$;

(2) Y_1与Y_n的协方差$Cov(Y_1, Y_n)$;

(3) $P\{Y_1 + Y_2 \le 0\}$.

24. 设X,Y是离散型随机变量,当$E|X-Y|=0$,证明X,Y同分布.

25. 设活塞X的平均直径是$20.00cm$,标准差是0.02;气缸Y的平均直径是$20.10cm$,标准差是0.02. 如果X,Y独立且都服从正态分布,可以证明$X-Y\sim N(-0.1, 8\times 10^{-4})$.用此结果计算活塞能装入气缸的概率.

26. 如果正方形抽屉的平均边长是$15.00cm$,标准差是0.02;正方形抽屉框的平均边长是$15.10cm$,标准差是0.02.设两对边长相互独立,服从正态分布,直角的误差忽略不计.计算抽屉能装入抽屉框的概率.

27. 设X,Y相互独立都服从指数分布$\varepsilon(\lambda)$,证明:
(1)$(X,X+Y)$和$(Y,X+Y)$同分布,
(2)$X/(X+Y)$和$Y/(X+Y)$同分布,
(3)$E\frac{X}{X+Y}=E\frac{Y}{X+Y}$.

28. 设(X,Y)有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2x^3y^2}, & x>1, 1<xy<x^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

计算$EY, E(XY)^{-1}$.

29. 设ϵ在$(0,2\pi)$上均匀分布,a是常数,k,j是整数,计算:
(1)$E\sin(ak+\epsilon)$;
(2)$E\sin^2(ak+\epsilon)$;
(3)$E[(\sin(ak+\epsilon)\sin(aj+\epsilon))$;

30. 设(X,Y)有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2(3x^3+xy)/5, & 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

计算EX.

31. 设$m>0, \mu=EX$存在,证明$E|X|^m<\infty$的充分必要条件是$E|X-\mu|^m<\infty$.

32. 设X的密度函数是偶函数,$0<EX^2<\infty$,证明$|X|$和X不相关,也不独立.

33. 设$X_1,X_2,...,X_n$是相互独立的随机变量,$Var(X_i)=\sigma_i^2$.求常数$a_1,a_2,...,a_n$满足$\sum_{j=1}^n a_j=1, a_j\geq 0$,且使得$Y=\sum_{j=1}^n a_jX_j$的方差最小.

34. 设一点随机地落在中心在原点,半径为R的圆周上.求落点横坐标的数学期望和方差.

35. 设X,Y独立同分布且服从$N(0,1)$, $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$,计算EZ.

36. 设X有概率密度
$$f(x)=\frac{x^m}{m!}e^{-x},\quad X\ge 0.$$
(1)计算X的数学期望和方差,
(2)证明:
$$P(0<X<2(m+1))\ge\frac{m}{m+1}.$$

37. 一部手机收到的短信中有2%是广告,你期望相邻的两次广告短信中有多少个短信不是广告.

38. 证明:$|E(XY)|\le E|XY|\le\sqrt{EX^2EY^2}$.

39. 证明常数和任何随机变量不相关.

40. 证明
(a)公式$\sigma_{XY}=E(XY)-(EX)(EY)$.
(b)定理:设ρ_{XY}是X,Y的相关系数,则有
(1)$|\rho_{XY}|\le 1$;
(2)$|\rho_{XY}|=1$的充分必要条件是有常数a,b使得$P(Y=a+bX)=1$;
(3)如果X,Y独立,则X,Y不相关.

41. 设$\mu_X=EX,\mu_Y=EY$,证明$E|XY|<\infty$的充要条件是
$$E|(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)|<\infty.$$

42. 设X是取非负整数值的随机变量,证明:
$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\ge k)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k).$$

43. 设EX存在,$p_j=P(X=a_j),j\ge 0$.如果$a_1<a_2<...$,并且$a_j\to\infty$,证明
$$\lim_{j\to\infty}a_jP(X\ge a_j)=0.$$

44. 一辆机场巴士运送25位乘客,中途经过7个车站.设每个乘客的行动相互独立,且在各车站下车的可能性相同,问平均有多少个车站有人下车?

45. 设$X_1,X_2,...,X_n$是互不相关的随机变量,有相同的数学期望μ和方差σ^2,计算:
(1)$S_n=X_1+X_2+...+X_n$的数学期望和方差,
(2)S_n/n的数学期望和方差,
(3)$T_n=X_1-X_2+...+(-1)^{n-1}X_n$的数学期望和方差,
(4)$T_n/\sqrt{n}$的数学期望和方差.

46. 在澳门赌场,有很多人在赌二十一点时顺便押对子.其规则如下: 庄家有放回地从6副(每副52张)扑克中随机发给你两张.如果你下注a元,当得到的两张牌是一对时,庄家赔你十倍,否则输掉你的赌注.计算你每局期望赢多少?

47. 设$X_1, X_2, ..., X_n$独立同分布,当X_1服从二项分布$B(m, p)$,利用概率的频率定义证明:当$n \to \infty$时,

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \longrightarrow EX_1.$$

48. 设X, Y独立同分布,都服从正态分布$N(0, \sigma^2)$,计算:
(1)$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$的密度,
(2)$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$的数学期望,
(3)$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$的方差.

49. 设$X_1, X_2, ..., X_n$相互独立,都服从(0,1)上的均匀分布.$X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$是$X_1, X_2, ..., X_n$的次序统计量.计算

$$E(X_{(1)}), E(X_{(n)}).$$

50. 设随机向量$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)^T$有数学期望$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)^T$和协方差矩阵$\mathbf{\Sigma}$.对于常数向量$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)^T$和$n \times m$矩阵$\boldsymbol{B}$,计算

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}$$

的数学期望和协方差矩阵.