概 率 论 基 础

张 新 生

Email: xszhang@fudan.edu.cn

复旦大学

April 1, 2013

教学内容

基本要求与成绩评定

1. 基本要求:
   概念、定理、例题、解题的基本技巧及应用基本理论解决实际问题的能力;
   课前预习、认真听课、课后复习、作业独立完成
2. 成绩评定:考勤：10%、作业：10%、期中：20%、期末：60%

3. 参考书:
   - 《概率论基础及其应用》，王梓坤著，科学出版社，1976 年版。
   - 《数理统计引论》，陈希儒著，科学出版社，1981年版。
   - 《概率论与数理统计》，李贤平、沈崇圣、陈子毅编著，复旦大学出版社。2003年版。
   - 《概率论及其应用》（上、下）Feller。
   - 《概率论与数理统计基础》周概容译。

研究对象与研究内容

- 研究对象：随机现象
- 研究内容：随机现象的数量规律性
- 确定性现象– 在一定条件下必然发生（出现）某一结果的现象称为确定性现象。
  每天早晨太阳从东方升起;
  水在标准大气压下加温到100^0C沸腾;
- 随机现象– 每次试验前不能预言出现什么结果，某一结果的出现有一定的偶然性。
  掷一枚硬币，正面朝上？反面朝上？
  某种型号电视机的寿命;

随机现象的特点：1. 结果不止一个; 2. 事先不知道哪一个会出现.

- 随机事件的频率稳定性：
- 频率：对于随机事件A，若在N次试验中出现了n次，则称F(A)=n/N 为事件A在N次试验中出现的频率。
- 统计规律性：随机事件的频率常在某个固定的常数附近摆动。
- 概率：对于随机事件A，客观上有一个数表示了它在一次试验中发生可能性的大小。概率就是频率的稳定值。

几个例子

- 例1:（生日问题）众所周知，如果有366个人则必定至少有两个人的生日在同一天。考虑如下问题：假设有$n(n < 366)$个人，问这n个人中至少有两个人的生日在同一天的可能性是多少？
- 例2：一池塘中有鱼若干条，采用何种方法可以快捷的估算出鱼的数目？
- 例3：在信封A与B内装有一定数量的人民币，已知其中之一的钱数是另外钱数的两倍。你随机的抽取一个信封，比如是A，现在给你一次调换的机会，问你换还是不换？

几个例子

- 例4(玛丽莲问题The Monty Hall Problem)：在三扇门后面分别藏有两只羊和一辆轿车。参与游戏的参与者可以先按自己的意愿选择一扇门，而游戏的操纵者则打开另外两扇门中的一扇门发现有羊，此时游戏的参与者还有一次重新选择的机会，即可以选择另外一扇未被打开的门。问游戏的参与者应该不应该重新选择？为什么？
- 例5：（血液检查中的经济学问题）：二战期间，必须征募很多人到部队，要检查申请者中某种罕见的疾病需要对每个人进行血液检查，如何保证”有问题的”会被查出，而检验次数尽可能的少？
- 例6：（敏感性问题的调查）如何设计一种调查方法，使被调查者正确回答被调查的敏感问题？（如你是否是HIV的病毒携带者等问题）。

几个例子

- 例7：机票的超售问题。一架有N座的飞机，如预售N张票，到起飞时如有顾客因故不能到来，则会留下空的座位而影响航空公司的收入。解决问题的办法是预售$C(> N)$张票，问题是如何确定C。
- 例8：上海市餐饮业发票抽奖问题。

概率论的发展简史

- 概率的概念起源于中世纪以来的欧洲流行的用骰子赌博，一般把1654年作为概率论诞生的时间。在这个概率论的草创阶段，最重要的里程碑是伯努利的著作《推测术》。
- 早期对概率论作出重要贡献的科学家有伯努利、拉普拉斯（Laplace）、泊松（Poisson）和高斯（Gauss）。
- 1933年苏联数学家柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）完成了概率论的公理体系，使概率论与数理统计成为数学的一个分支。

概率论的概念和方法是数理统计学的理论基础

目前概率论中几个重要的研究领域:

极限定理（Limit Theorem)、大偏差(Large Deviation）、Markov过程、鞅(Martingale)、随机分析（Stochastic Analysis）、数理金融（Mathematics Finance）、时间序列（Time Series）：（ARMA模型、ARCH模型、GARCH模型）

概率论与数理统计的应用

概率统计理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中。目前最热门的两个领域：

- 金融数据分析
- 生命科学中的数据分析

1. 什么是样本空间

1. 什么是样本空间

- 对某事物特征进行观察，统称试验.若它有如下特点,则称为随机试验,用E表示
  （i）试验结果不止一个,但能明确所有的结果;
  （ii）试验前不能预知出现哪种结果.

1. 什么是样本空间

- 对某事物特征进行观察，统称试验.若它有如下特点,则称为随机试验,用E表示
  （i）试验结果不止一个,但能明确所有的结果;
  （ii）试验前不能预知出现哪种结果.
- 样本空间—
  随机试验E 所有可能的结果。组成的集合称为样本空间记为Ω

1. 什么是样本空间

- 对某事物特征进行观察, 统称试验.若它有如下特点,则称为随机试验,用E表示
  (i) 试验结果不止一个,但能明确所有的结果;
  (ii) 试验前不能预知出现哪种结果.
- 样本空间—
  随机试验E 所有可能的结果。组成的集合称为样本空间记为Ω
- 样本空间的元素, 即E的直接结果, 称为: 样本点(基本事件).常记为ω,$\Omega = \{\omega\}$

2.例

[样本空间]:

E_1:投一枚硬币3次，观察正面出现的次数
$\Omega_1 = \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow$有限样本空间

E_2:观察总机每天接到的电话次数
$\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, ...N\}$

E_3:观察某地区每天的最高温度与最低温度
$\Omega_3 = \{(x, y) \mid T_1 \leq x \leq y \leq T_2\}$
其中T_1,T_2分别是该地区的最低与最高温度$\longrightarrow$无限样本空间

2. 什么是随机事件

2. 什么是随机事件

- 随机事件— Ω的子集，记为A ,B ,$\cdots$

2. 什么是随机事件

- 随机事件— Ω的子集, 记为A ,B ,···
- 基本事件— 仅由一个样本点组成的子集它是随机试验的直接结果.

2. 什么是随机事件

- 随机事件— Ω的子集，记为A ,B ,$\cdots$
- 基本事件— 仅由一个样本点组成的子集它是随机试验的直接结果.
- 随机事件发生— 组成随机事件的一个样本点发生

2. 什么是随机事件

- 随机事件— Ω的子集, 记为A ,B ,···
- 基本事件— 仅由一个样本点组成的子集它是随机试验的直接结果.
- 随机事件发生— 组成随机事件的一个样本点发生
- 必然事件— 全体样本点组成的事件,记为Ω, 每次试验必定发生的事件.

2. 什么是随机事件

- 随机事件— Ω的子集, 记为A ,B ,$\cdots$
- 基本事件— 仅由一个样本点组成的子集它是随机试验的直接结果.
- 随机事件发生— 组成随机事件的一个样本点发生
- 必然事件— 全体样本点组成的事件,记为Ω, 每次试验必定发生的事件.
- 不可能事件— 不包含任何样本点的事件, 记为Φ ,每次试验必定不发生的事件.

3.文氏图

随机事件的关系和运算与集合的关系和运算相同.

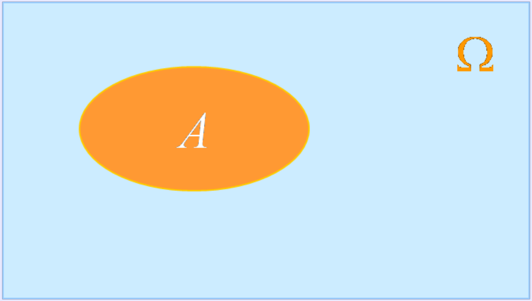


Figure: Venn diagram

4.事件的包含与相等

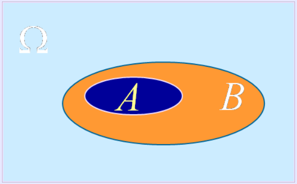


Figure: Venn diagram

4.事件的包含与相等

- $A \subset B$—A包含于B
  $\Longleftrightarrow$事件A发生导致事件B发生

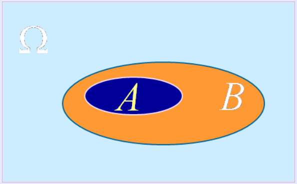


Figure: Venn diagram

4.事件的包含与相等

- $A \subset B$—A包含于B
  $\Longleftrightarrow$事件A发生导致事件B发生
- 事件的相等—$A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ 且$B \subset A$

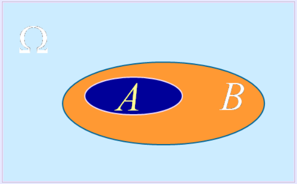


Figure: Venn diagram

5.事件的并(和)

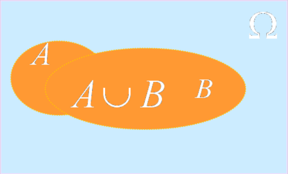


Figure: Venn diagram

5.事件的并(和)

- $A \cup B$ 或$A+B$—A与B的和事件
  $A \cup B$发生$\Longleftrightarrow$事件A与事件B至少有一个发生

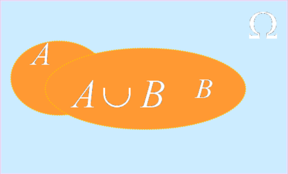


Figure: Venn diagram

5.事件的并(和)

- $A \cup B$ 或$A+B$—A与B的和事件
  $A \cup B$发生$\Longleftrightarrow$事件A与事件B至少有一个发生
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$的和事件—$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

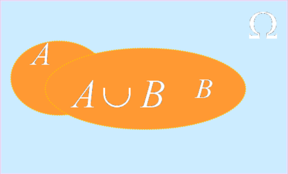


Figure: Venn diagram

5.事件的并(和)

- $A \cup B$ 或$A+B$—A与B的和事件
  $A \cup B$发生$\Longleftrightarrow$事件A与事件B至少有一个发生
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$的和事件—$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$的和事件—$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

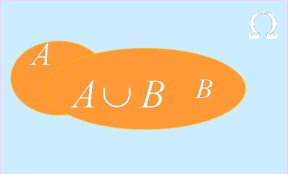


Figure: Venn diagram

6.事件的交(积)

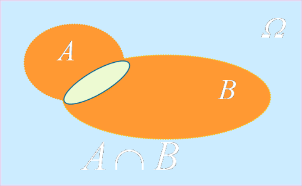


Figure: Venn diagram

6.事件的交(积)

- $A \cap B$ 或AB—A与B的积事件
  $A \cap B$发生$\Longleftrightarrow$事件A与事件B同时发生

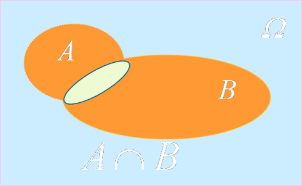


Figure: Venn diagram

6.事件的交(积)

- $A \cap B$ 或AB—A与B的积事件
  $A \cap B$发生$\Longleftrightarrow$事件A与事件B同时发生
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$的积事件—$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

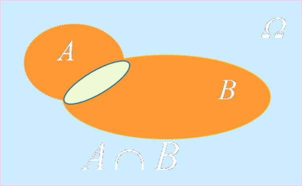


Figure: Venn diagram

6.事件的交(积)

- $A\cap B$ 或AB—A与B的积事件
  $A\cap B$发生$\Longleftrightarrow$事件A与事件B同时发生
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$的积事件—$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$的积事件—$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

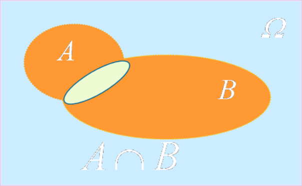


Figure: Venn diagram

7.事件的差

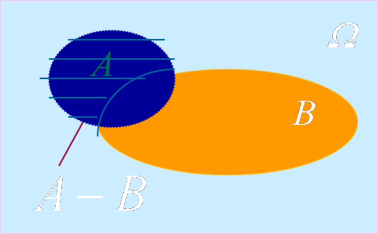


Figure: Venn diagram

7.事件的差

- $A-B$ 或 $A\bar{B}$—A与B的差事件
  $A-B$发生$\Longleftrightarrow$事件A发生，但事件B不发生

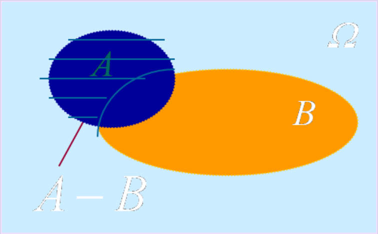


Figure: Venn diagram

7.事件的互斥

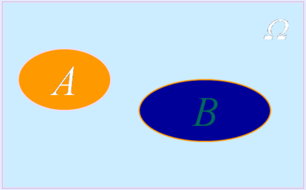


Figure: Venn diagram

7.事件的互斥

- $AB=\emptyset$—A与B互斥$\Longleftrightarrow A,B$不可能同时发生

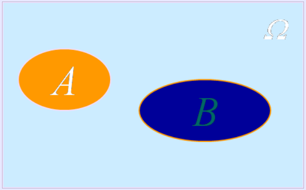


Figure: Venn diagram

7.事件的互斥

- $AB=\emptyset$—A与B互斥$\Longleftrightarrow$ A,B不可能同时发生
- $A_1,A_2,\ldots,A_n$两两互斥$\Longleftrightarrow$

$\mathrm{A}_iA_j=\emptyset, i\neq j, i,j=1,2,\ldots,n$

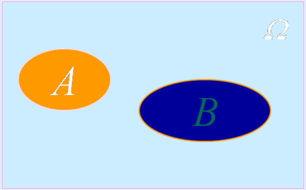


Figure: Venn diagram

7.事件的互斥

- $AB=\emptyset$—A与B互斥$\Longleftrightarrow A,B$不可能同时发生
- $A_1,A_2,\ldots,A_n$两两互斥$\Longleftrightarrow$

$A_iA_j=\emptyset, i\neq j, i,j=1,2,\ldots,n$

- $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$ 两两互斥$\Longleftrightarrow$
  $A_iA_j=\emptyset, i\neq j, i,j=1,2,\ldots$

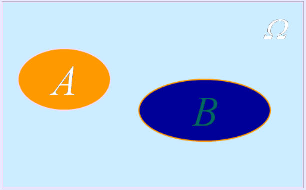


Figure: Venn diagram

8.事件的对立

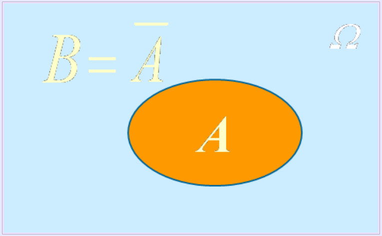


Figure: Venn diagram

8.事件的对立

- $AB=\emptyset$, $A\cup B=\Omega$—A与B为相互对立的两个事件 $\Longleftrightarrow$每次试验A，B有且只有一个发生，称B为A的对立事件（逆事件），记为：$B=\bar{A}$

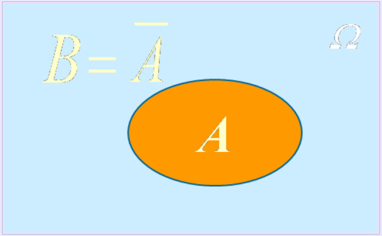


Figure: Venn diagram

8.事件的对立

- $AB=\emptyset,\ A\cup B=\Omega$—$A$与$B$为相互对立的两个事件 $\Longleftrightarrow$每次试验A，B有且只有一个发生，称B为A的对立事件（逆事件），记为：$B=\bar{A}$
- 注意："A与B相互独立与"A与B" 互斥是不同的概念。

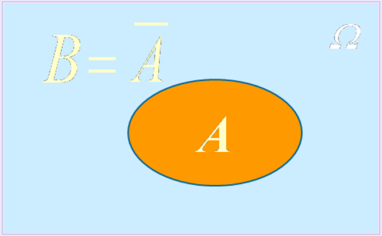


Figure: Venn diagram

9.完备事件组

若$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互斥，且$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$
则称$A_1, A_2, \ldots, A_n$为完备事件组，或称$A_1, A_2, \ldots, A_n$为Ω的一个划分。

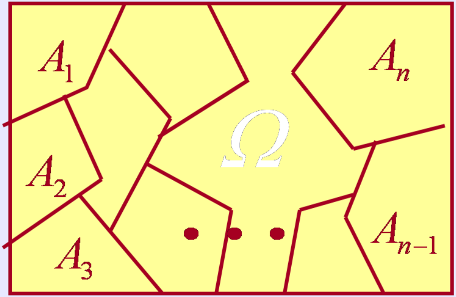


Figure: Venn diagram

10.常用集合运算等式

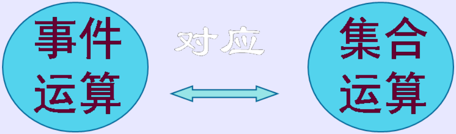


Figure: Venn diagram

10.常用集合运算等式

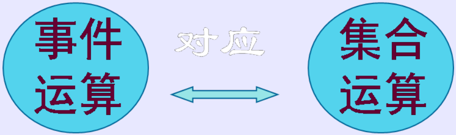


Figure: Venn diagram

- $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$

10.常用集合运算等式

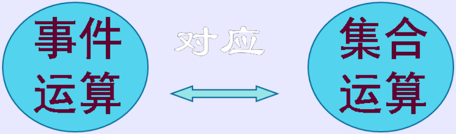


Figure: Venn diagram

- $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$
- $A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$

10.常用集合运算等式

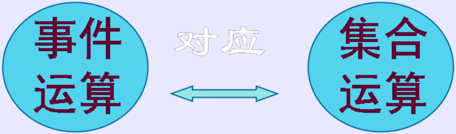


Figure: Venn diagram

- $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$
- $A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup (AB) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A \qquad \bar{\bar{A}} = A$

10.常用集合运算等式

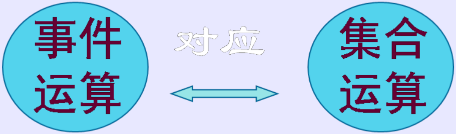


Figure: Venn diagram

- $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$
- $A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup (AB) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A \qquad \bar{\bar{A}} = A$
- $A \cup A = A \qquad A \cap A = A$

10.常用集合运算等式

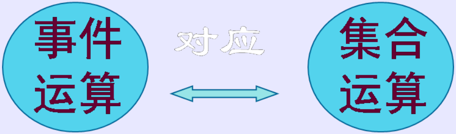


Figure: Venn diagram

- $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$
- $A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup (AB) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A \qquad \bar{\bar{A}} = A$
- $A \cup A = A \qquad A \cap A = A$
- $A - B = A\bar{B} = A - (AB)$

11.事件的运算法则

11.事件的运算法则

- 交换律：$A \cup B = B \cup A \quad AB = BA$

11.事件的运算法则

- 交换律：$A \cup B = B \cup A \quad AB = BA$
- 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (AB)C = A(BC)$

11.事件的运算法则

- 交换律：$A \cup B = B \cup A \quad AB = BA$
- 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (AB)C = A(BC)$
- 分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$

11.事件的运算法则

- 交换律：$A\cup B=B\cup A \quad AB=BA$
- 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \quad (AB)C=A(BC)$
- 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

A $\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$

- 对偶律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B} \quad \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$
  $=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i$

11.例

例：试用A，B,C表示下列事件：

1 A发生; A

2 仅A发生； $A\bar{B}\bar{C}$

3 恰有一个发生； $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$

4 至少有一个发生； $A \cup B \cup C$

5 至多有一个发生;$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$

6 都不发生;$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

7 不都发生;$A\bar{B}C = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

8 至少有两个发生； $AB \cup BC \cup AC$

12. 古典概率模型的定义与计算

设随机试验E具有下列特点:

1.基本事件的个数有限

2.每个基本事件的发生是等可能

则称E 为古典概型

古典概型中概率的定义与计算: 记n=Ω中包含的基本事件总数k =组成A的基本事件个数则:

$$P(A) = k/n$$

12.生日问题

众所周知，如果有366个人则必定至少有两个人的生日在同一天。考虑如下问题：假设有n $(n < 366)$个人，问这n个人中至少有两个人的生日在同一天的可能性是多少？

12.生日问题

解：

随机试验：逐次记录这n个人的生日。样本空间：

$$\Omega = \{(i_1, i_2, \ldots, i_n), 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots i_n \leq 365\}$$

事件A (这n个人中至少有两个人的生日在同一天) $P_n = P($至少两人生日相同$) = 1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$

$$P_{20} = 0.4058, P_{30} = 0.6963, P_{50} = 0.9651, P_{60} = 0.9922$$

13. 排列组合知识复习

加法原理： 完成一件事情有n 类方法，第i 类方法中有m_i种具体的方法，则完成这件事情共有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i$$

种不同的方法。

乘法原理： 完成一件事情有n 个步骤，第i 个步骤中有m_i种具体的方法，则完成这件事情共有

$$\prod_{i=1}^{n} m_i$$

种不同的方法。

14. 放球模型

设有n个球，将其放入N个盒子中，按下列方式放球($n \leq N$):
(I) 球是有区别的，每盒中放球数不限;

(II) 球是有区别的，每盒中放球数不超过1个;

(III) 球是无区别的，每盒中放球数不限;

(IV) 球是无区别的，每盒中放球数不超过1个;

求每一种方式中各有多少种放法?

14. 例1

设有k个不同的球，每个球等可能地落入N个盒子中$(k \leq N)$，设每个盒子容球数无限，球下列事件的概率

(1) 某指定的k 个盒子中各有一球;

(2) 某指定的一个盒子恰有m个球$(m \leq k)$;

(3) 某指定的一个盒子没有球；

(4) 恰有k 个盒子中各有一球；

(5) 至少有两个球在同一盒子中；

(6) 每个盒子至多有一个球；

14. 例1(解)

$$P(A_1) = \frac{m_{A_1}}{n} = \frac{k!}{N^k}$$

$$P(A_2) = \frac{C_k^m (N-1)^{(}k-m)}{N^k}$$

$$P(A_3) = \frac{(N-1)^k}{N^k}$$

$$P(A_4) = \frac{C_N^k k!}{N^k}$$

$$P(A_5) = \frac{N^k - C_N^k k!}{N^k}, P(A_6) = P(A_4)$$

15. 例

[例2]：一列火车有n节车厢，有$K(Kn)$个乘客上火车，并随机的选择车厢。求每节车厢内至少有一名乘客的概率。

[例3]：一口袋中装有a只黑球b只白球，现在随机地一次一次不放回摸球，求第$k(k \leq a+b)$次摸到黑球的概率

15. 两种抽样方式

问题： N个产品，其中M个不合格品、$N-M$个合格品，从中有放回及不放回任取n个，则此n个产品中有m个不合格品的概率为多少？

解：

有放回抽样：

$$\binom{n}{m}\frac{M^m(N-M)^{n-m}}{N^n}=\binom{n}{m}\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-m}$$

$m=0,1,2,\ldots\ldots,n$ (二项分布)

不放回抽样：

$$\frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

$n\leq N, m\leq M, (n-m)\leq(N-M)$ (超几何分布).

从直观上看，当产品总数很大而抽样较少时，采取两种抽样的结果应该差别不大.

16. 例

△ 购买：从01...35中选7个号码。
△ 开奖：7个基本号码，1个特殊号码。
△ 中将规则

1) 7个基本号码；
2) 6个基本号码+ 1个特殊号码；
3) 6个基本号码；
4) 5个基本号码+ 1个特殊号码；
5) 5个基本号码;
6) 4个基本号码+1个特殊号码；
7) 4个基本号码，或3个基本号码+ 1个特殊号码。

16. 例

△ Ω 中所含样本点个数：C_{35}^7
△ 将35个号分成三类：7个基本号码、1个特殊号码、27个无用号码
△ 记p_i为中i等奖的概率，利用抽样模型得到：

$$p_1 = \frac{C_7^7 C_1^0 C_{27}^0}{C_{35}^7} \quad , p_2 = \frac{C_7^6 C_1^1 C_{27}^0}{C_{35}^7}$$

△ 中奖概率如下：
$p_1 = \frac{1}{6724520}$，$p_2 = \frac{7}{6724520}$，$p_3 = \frac{189}{6724520} p_4 = \frac{567}{6724520}$，$p_5 = \frac{7371}{6724520}$，$p_6 = \frac{12285}{6724520}$ $p_7 = \frac{204750}{6724520}$
△ 不中奖概率为:$p_0 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6 - p_7 = \frac{6499350}{6724520} = 0.966515.$

18. 古典概率的基本性质

(1) 对任何事件A，$P(A) > 0$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

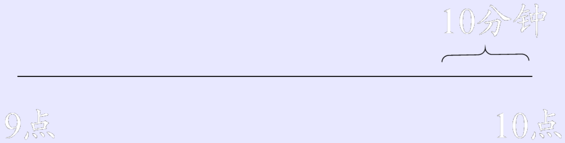
(3) 有限可加性

19. 几何概型的定义与计算

设样本空间为有限区域Ω, 若样本点落入Ω内任何区域G中的概率与区域G的测度成正比, 则样本点落入G内的概率为:

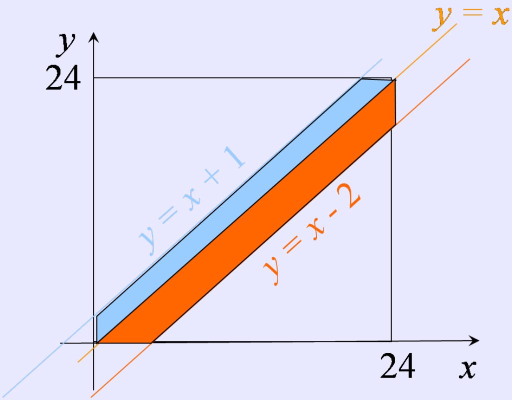
19. 例

两船欲停同一码头, 两船在一昼夜内独立随机地到达码头. 若两船到达后需在码头停留的时间分别是1 小时与2 小时, 试求在一昼夜内，任一船到达时，需要等待空出码头的概率.



19. 例

解： 设船1 到达码头的瞬时为x，$0 \le x < 24$, 设船2 到达码头的瞬时为y，$0 \le y < 24$. 设事件A 表示任一船到达码头时需要等待空出码头



19. 例

$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x < 24, 0 \leq y < 24\}$

$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, 0 \leq y - x \leq 1,$

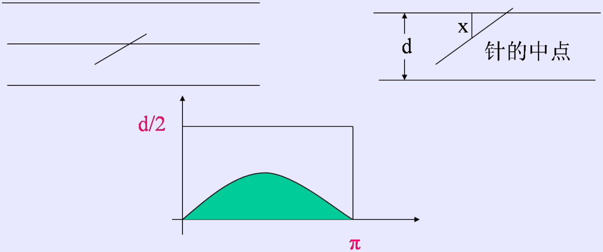
$0 \leq x - y \leq 2\}$

$S_\Omega = 24^2 \qquad S_{\bar{A}} = \frac{1}{2}(23^2 + 22^2) P(A) = 1 - \frac{S_{\bar{A}}}{S_\Omega} = 0.1207$

20.蒲丰投针问题

蒲丰投针：平面上画着一些平行线，
线之间的距离都为d，向此平面任投一长度为$l(l < a)$的针，
求此针与任一平行线相交的概率？

20. 蒲丰问题的图示



蒲丰问题的图示

20.蒲丰投针问题

以x表示针的中点与最近一条平行线的距离，
又以φ表示针与此直线间的交角.易知：空间Ω满足:

$$0 \le x \le d/2; \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

Ω 形成$x-\varphi$平面上的一个矩形，其面积为：$S_\Omega = d(\pi/2)$.
A ＝ “针与平行线相交”的充要条件是:

$$x \le l \sin(\varphi/2)$$

于是：$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\int_0^\pi l \sin(\varphi/2) d\varphi}{d(\pi/2)} = \frac{2l}{d\pi}$

20. π的随机模拟

20. π的随机模拟

- 由蒲丰投针问题知：长为l 的针与平行线相交的概率为:$2l/d\pi$

20. π的随机模拟

- 由蒲丰投针问题知：长为l 的针与平行线相交的概率为:$2l/d\pi$
- 而实际去做N 次试验，得n 次针与平行线相交，则频率为:n/N.

20. π的随机模拟

- 由蒲丰投针问题知：长为l 的针与平行线相交的概率为:$2l/d\pi$
- 而实际去做N 次试验，得n 次针与平行线相交，则频率为:n/N.
- 用频率代替概率得:$\pi \approx 2lN/(dn)$

20. π的随机模拟

- 由蒲丰投针问题知：长为l 的针与平行线相交的概率为:$2l/d\pi$
- 而实际去做N 次试验，得n 次针与平行线相交，则频率为:n/N.
- 用频率代替概率得:$\pi \approx 2lN/(dn)$
- 历史上有一些著名的实验数据。

20. π的随机模拟

- 由蒲丰投针问题知：长为l 的针与平行线相交的概率为:$2l/d\pi$
- 而实际去做N 次试验，得n 次针与平行线相交，则频率为:n/N.
- 用频率代替概率得:$\pi \approx 2lN/(dn)$
- 历史上有一些著名的实验数据。
- 问题推广：平面上画有间隔为d的等距平行线，向平面任意投掷一个边长为a,b,c (均小于d)的三角形，三角形与平行线相交的概率?

21. 几何概型的基本性质

(1) 对任何事件A，$P(A) > 0$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

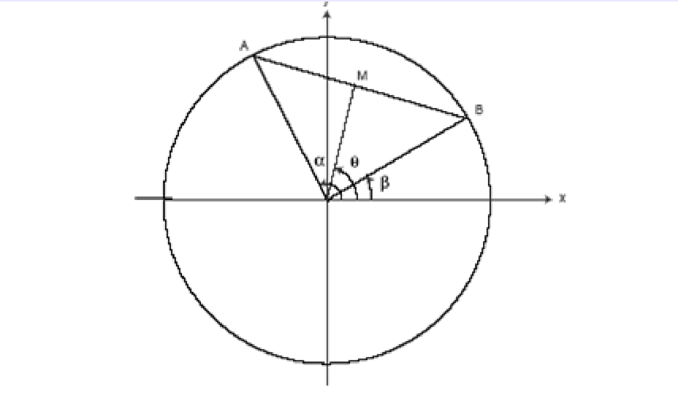
(3) 有限可加性

思考题：一个事件的概率等于零，这个事件一定是不可能事件吗？

21. 例

贝特朗（Bertrand）奇论：在半径为1的圆内随机的取一条弦，问其长超过该圆内接等边三角形的边长的概率等于多少？

22.对“随机地”几种不同的理解:



23. 随机地的三种不同理解

23. 随机地的三种不同理解

- 设任意一弦的中点直角坐标为(x, y)，此弦在园内的充分必要条件为：$x_2 + y_2 \leq 1$,此时弦长：$L = 2\sqrt{1-(x^2+y^2)}$,$L > \sqrt{3}$ 等价于$x_2 + y_2 < 1/4$,此时，$p = [(1/4)\pi]/1\pi = 1/4$

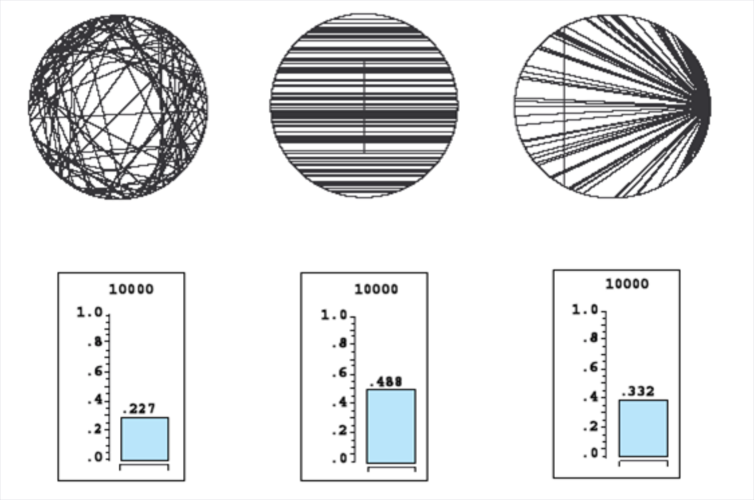
23. 随机地的三种不同理解

- 设任意一弦的中点直角坐标为(x,y)，此弦在园内的充分必要条件为：$x_2+y_2\leq 1$,此时弦长：$L=2\sqrt{1-(x^2+y^2)}$,$L>\sqrt{3}$ 等价于$x_2+y_2<1/4$,此时，$p=[(1/4)\pi]/1\pi=1/4$
- 设任意一弦的中点极坐标为(γ,θ)弦在圆内的充分必要条件为：$-1\leq\gamma\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi$ 弦长：$L=2\sqrt{1-\theta^2}$, $L>\sqrt{3}$ 等价于$\mid\gamma\mid<1/2$ 所以$p=[1/2-(-1/2)]/[1-(-1)]=1/2$

23. 随机地的三种不同理解

- 设任意一弦的中点直角坐标为(x,y)，此弦在园内的充分必要条件为：$x_2+y_2\leq 1$,此时弦长：$L=2\sqrt{1-(x^2+y^2)}$,$L>\sqrt{3}$ 等价于$x_2+y_2<1/4$,此时，$p=[(1/4)\pi]/1\pi=1/4$
- 设任意一弦的中点极坐标为(γ,θ)弦在圆内的充分必要条件为：$-1\leq\gamma\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi$ 弦长：$L=2\sqrt{1-\theta^2}$, $L>\sqrt{3}$ 等价于$|\ \gamma\ |<1/2$ 所以$p=[1/2-(-1/2)]/[1-(-1)]=1/2$
- 弦的两个端点A、B取极坐标$A(1,\alpha)$,$B(1,\beta)$ 可假定弦的一端固定，比如$B(0,\beta)$，此时弦长$L=\sqrt{2-2\cos\alpha}$ $L>\sqrt{3}$ 等价于$(2/3)\pi<\alpha<(4/3)\pi$ $p=[(4/3)\pi-(2/3)\pi]/[2\pi-0]=1/3$

23. 随机地的三种不同理解



24. 概率论的公理化

设Ω是随机试验E 的样本空间，若能找到一个对应法则，使得对于E 的每一事件A 赋于一个实数，记为$P(A)$，满足：

24. 概率论的公理化

设Ω是随机试验E 的样本空间，若能找到一个对应法则，使得对于E 的每一事件A 赋于一个实数，记为$P(A)$，满足：

- 非负性公理：　$P(A) \geq 0$;

24. 概率论的公理化

设Ω是随机试验E的样本空间，若能找到一个对应法则，使得对于E的每一事件A赋于一个实数，记为$P(A)$，满足：

- 非负性公理： $P(A) \geq 0$;
- 正则性公理： $P(\Omega) = 1$;

24. 概率论的公理化

设Ω是随机试验E 的样本空间，若能找到一个对应法则，使得对于E 的每一事件A 赋于一个实数，记为$P(A)$, 满足：

- 非负性公理：　$P(A) \geq 0;$
- 正则性公理：　$P(\Omega) = 1;$
- 可列可加性公理：若$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots,$互不相容，则$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

25. 概率性质及其应用

25. 概率性质及其应用

- $P(\varphi) = 0$ 注意: 逆不一定成立.

25. 概率性质及其应用

- $P(\varphi) = 0$ 注意: 逆不一定成立.
- 概率有有限可加性:
  若$AB = \varphi$,则$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.可推广到n 个互不相容事件.

25. 概率性质及其应用

- $P(\varphi) = 0$ 注意: 逆不一定成立.
- 概率有有限可加性:
  若$AB = \varphi$,则$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.可推广到n 个互不相容事件.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

25. 概率性质及其应用

- $P(\varphi) = 0$ 注意: 逆不一定成立.
- 概率有有限可加性:
  若$AB = \varphi$,则$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.可推广到n 个互不相容事件.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- 对任意两个事件A, B, 有:$P(B - A) = P(B) - P(AB)$

25. 概率性质及其应用

- $P(\varphi)=0$ 注意：逆不一定成立.
- 概率有有限可加性：
  若$AB=\varphi$,则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.可推广到n 个互不相容事件.
- $P(\bar{A})=1-P(A)$;
- 对任意两个事件A, B, 有:$P(B-A)=P(B)-P(AB)$
- 广义加法公式：布尔不等式（次可加性）,Bonferroni不等式;

25. 概率性质及其应用

- $P(\varphi) = 0$ 注意：逆不一定成立.
- 概率有有限可加性：
  若$AB = \varphi$,则$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.可推广到n 个互不相容事件.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- 对任意两个事件A, B, 有:$P(B - A) = P(B) - P(AB)$
- 广义加法公式：布尔不等式（次可加性）,Bonferroni不等式;
- 可列可加性与连续性.

26. 事件序列的极限

26. 事件序列的极限

- 若事件序列$\{F_n\}$满足：$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \ldots$
  则称$\{F_n\}$为单调不减事件序列，其极限事件为：

$$\lim_{n \to +\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$

26. 事件序列的极限

- 若事件序列$\{F_n\}$满足：$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \dots$
则称$\{F_n\}$为单调不减事件序列，其极限事件为：

$$\lim_{n\to +\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$

- 若事件序列$\{F_n\}$满足：$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \dots$
则称$\{F_n\}$为单调不增事件序列，其极限事件为：

$$\lim_{n\to +\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$$

27. 集合函数的连续性

设P(·)是一个集合函数,

27. 集合函数的连续性

设P(•)是一个集合函数,

- 若任对单调不减集合序列$\{F_n\}$,有

$$P(\lim_{n\to +\infty} F_n) = \lim_{n\to +\infty} P(F_n)$$

则称P(•)是下连续的.

27. 集合函数的连续性

设P(·)是一个集合函数,

- 若任对单调不减集合序列$\{F_n\}$,有

$$P(\lim_{n\to+\infty} F_n) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$$

则称P(·)是下连续的.

- 若任对单调不增集合序列$\{F_n\}$,有

$$P(\lim_{n\to+\infty} F_n) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$$

则称P(·)是上连续的.

28. 概率的连续与可列可加

28. 概率的连续与可列可加

- 性质：若P(·)是事件域Φ上的一个概率函数，则P(·) 既是下连续的，又是上连续的

28. 概率的连续与可列可加

- 性质：若P(·)是事件域Φ上的一个概率函数，则P(·) 既是下连续的，又是上连续的
- 定理：若P(·)是事件域Φ上满足：非负、正则的集合函数，则P(·) 有可列可加性的充要条件是它具有有限可加性和下连续性.

28. P44例7

某城市有N辆卡车，车号从1到N，有一个外地人到该城去，把遇到的n辆车子的牌号记下（可能重复），求记下的最大号码正好为k的概率。

解：因为“乘积能被10整除”意味着：“取到过5”(记为A) 且“取到过偶数”(记为B)，因此所求概率为$P(AB)$.

利用对立事件公式、德莫根公式和加法公式:

$$P(AB) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{B})$$

=1-$8^n/9^n - 5^n/9^n + 4^n/9^n$

28. p45例6

某人写好n封信，又写好n只信封，然后，将每封信随机地放入n只信封中，求至少有一封信放对的概率？

28. p45例6(解)

记A_i = “第i 封信与信封相符”，$i = 1, 2, \ldots, n$ 要求的概率为：$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cdots \cup A_n)$
用加法公式:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) + \cdots +$$

$(-1)^n P(A_1A_2 \ldots\ldots A_n)$
又$P(A_1A_2 \ldots\ldots A_n) = 1/n!$;

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - 1/2! + 1/3! + \ldots \cdots + (-1)^n/n!$$

$\rightarrow 1 - e^{-1}$

29. 第一章小结

(1) 概率论是研究随机现象的数量规律性的一门数学学科
(2) 事件与概率的描述性与公理化定义
(3) 古典概型与几何概型中的概率计算

1.条件概率的定义

定义：设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一概率空间，$B \in \mathcal{F}$,
且$P(B) > 0$，则对任意$A \in \mathcal{F}$,定义：

$$P(A \mid B) = P(AB)/P(B)$$

称$P(A \mid B)$为在事件B发生条件下事件A发生的条件概率（Conditional Probability）

1.例子

10个产品中有7个正品、3个次品，从中不放回地抽取两个，已知第一个取到次品，求第二个又取到次品的概率.

解： 设A = {第一个取到次品},
B = {第二个取到次品},

$$P(B \mid A) = P(BA)/P(A) = (1/15)/(3/10) = 2/9$$

2.例子

（P57例1）在肝癌普查中发现，某地区的自然人群中，每十万人中平均有40人患原发性肝癌，有34人甲胎球蛋白高含量，有32人同时发生肝癌和甲胎球蛋白高含量。以事件C表示患发性肝癌，以事件D表示患者甲胎球蛋白高含量。

一项人口调查结果表明，深色眼睛的父亲和深色眼睛的儿子占被调查者的5%，深色眼睛的父亲和浅色眼睛的儿子占7.9%，浅色眼睛的父亲和深色眼睛的儿子占8.9%，浅色眼睛的父亲和浅色眼睛的儿子占78.2%，问父子的眼睛深浅色有无联系？

2.条件概率公式及其应用

乘法公式：$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)\dots P(A_n \mid A_1A_2\dots A_{n-1})$$

实例：（波利亚罐子模型）罐子中有b只黑球及r只红球，随机取出一只，把原球放回，并加入与抽出球颜色相同的球c只再摸第二次，这样下去共摸了n次，问前面的n_1次都出现黑球，而后面$n_2 = n - n_1$次都出现红球的概率是多少？

3.全概率公式

若事件$B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$是样本空间$\Omega$的一组分割，且$P(B_i) > 0$,则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

3.补例

设10 件产品中有3 件不合格品，从中不放回地取两次，每次一件，求取出的第二件为不合格品的概率。

解：设A = “第一次取得不合格品”，
B = “第二次取得不合格品”.由全概率公式得：

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})$$

$$=(3/10)\times(2/9)+(7/10)\times(3/9)=3/10$$

4. 注意

4. 注意

- 全概率公式用于求复杂事件的概率.

4. 注意

- 全概率公式用于求复杂事件的概率.
- 使用全概率公式关键在于寻找另一组事件来“分割”样本空间.

4. 注意

- 全概率公式用于求复杂事件的概率.
- 使用全概率公式关键在于寻找另一组事件来“分割”样本空间.
- 全概率公式最简单的形式:

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(\bar{B})P(A \mid \bar{B})$$

5. 摸彩模型

一：n 张彩票中有k 张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到奖券”，则:

$$P(A_i)=k/n, i=1,2,3,\ldots,n$$

二：n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到中奖券”，则:

5. 摸彩模型

一：n 张彩票中有k 张中奖，从中不返回地摸取，
记A_i为“第i 次摸到奖券”，则:

$$P(A_i) = k/n, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

二：n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到中奖券”，则:

- $P(A_1) = 1/n$

5. 摸彩模型

一：n 张彩票中有k 张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到奖券”，则:

$$P(A_i) = k/n, i = 1, 2, 3, \dots, n$$

二：n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到中奖券”，则:

- $P(A_1) = 1/n$
- 可用全概率公式计算得:$P(A_2) = 1/n$

5. 摸彩模型

一：n 张彩票中有k 张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到奖券”，则:

$$P(A_i) = k/n, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

二：n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到中奖券”，则:

- $P(A_1) = 1/n$
- 可用全概率公式计算得:$P(A_2) = 1/n$
- 可用归纳法计算得:

$$P(A_i) = 1/n, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

6.敏感性问题的调查

要调查“敏感性”问题中某种比例p；

两个问题：A：生日是否在7月1日前？

B:是否考试作弊？

抛硬币回答A或B.

答题纸上只有：“是”、“否”.

可用全概率公式分析“敏感性”问题.

5.贝叶斯（Bayes）公式

5.贝叶斯（Bayes）公式

- 已知“结果”，求“原因”
  例：某人从甲地到乙地，乘飞机、火车、汽车迟到的概率分别为0.1、0.2、0.3，他等可能地选择这三种交通工具。若已知他最后迟到了，求他分别是乘飞机、火车、汽车的概率

5.贝叶斯（Bayes）公式

- 已知“结果”，求“原因”
  例：某人从甲地到乙地，乘飞机、火车、汽车迟到的概率分别为0.1、0.2、0.3，他等可能地选择这三种交通工具。若已知他最后迟到了，求他分别是乘飞机、火车、汽车的概率
- 核心公式：若事件$B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$是样本空间$\Omega$ 的一组分割，且$P(A) > 0, P(B_i) > 0$,则

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}$$

$$i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

6.注意

1) $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$可以看作是导致A发生的原因;

2) $P(B_j \mid A)$是在事件A发生的条件下，某个原因B_j发生的概率，称为“后验概率”;

3) Bayes公式又称为“后验概率公式”或“逆概公式”;

4) 称$P(B_j)$为“先验概率”.

6.补例

某商品由三个厂家供应，其供应量为：甲厂家是乙厂家的2倍；乙、丙两厂相等。各厂产品的次品率为2%, 2%, 4%. 若从市场上随机抽取一件此种商品，发现是次品，求它是甲厂生产的概率?

6.补例

解：用1、2、3分别记甲、乙、丙厂，设 A_i= “取到第i 个工厂的产品”，B= “取到次品”，

由题意得: $P(A_1)=0.5, P(A_2)=P(A_3)=0.25$；

$P(B \mid A_1)=P(B \mid A_2)=0.02, P(B \mid A_3)=0.04$

由Bayes公式得:

$$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i)}=0.4$$

1.事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的.

$$\Longleftrightarrow P(A \mid B) = P(A)$$

$$\Longleftrightarrow P(AB)/P(B) = P(A)$$

$$\Longleftrightarrow P(A \mid B) = P(A)P(B)$$

2.两事件的独立性

定义：称事件A、B是相互独立(Independent)的，如果，

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

2.两事件的独立性

定义：称事件A、B是相互独立(Independent)的，如果，

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

- 推论1：A、B 为两个事件，若$P(A) > 0$,则A 与B 独立等价于$P(B \mid A) = P(B)$

2.两事件的独立性

定义：称事件A、B是相互独立(Independent)的，如果，

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

- 推论1：A、B 为两个事件，若$P(A) > 0$,则A 与B 独立等价于$P(B \mid A) = P(B)$
- 推论2：若事件A与B独立，则
A 与$\bar{B}$独立、$\bar{A}$与B独立、$\bar{A}$与$\bar{B}$独立.

2.多事件的独立性

定义：对三个事件A、B、C，如果以下四个等式同时成立：

(1) $P(AB) = P(A)P(B)$

(2) $P(AC) = P(A)P(C)$

(3) $P(BC) = P(B)P(C)$

(4) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

则称事件A、B、C相互独立。

3.N事件的独立性

一般，对n 个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$如果下列2n-n-1个等式成立：

- $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (*)$
- $P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$

......

- $P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1)P(A_2), \ldots, P(A_n)$

特别，如果仅等式$(*)$成立则称事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$是两两相互独立的。最后，称无穷多个事件是相互独立的，其中任意有限多个事件都是相互独立的。

4.事件独立性的判断

实际应用中，往往根据经验来判断两个事件的独立性：例如:

返回抽样、甲乙两人分别工作、重复试验等. 但有时直观有可能会出错

例：分别在有三个孩子和两个孩子的家庭中考虑事件A “有男孩也有女孩”；B “至多只有一个女孩”

解：在三个孩子的家庭中:

$$P(A) = 6/8, P(B) = 4/8, P(AB) = 3/8$$

4.例

两射手轮流对同一目标进行射击，甲先射，谁先击中则得胜。每次射击中，甲、乙命中目标的概率分别为α 和β ，求甲得胜的概率。

解：

因为P(甲胜)$= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)$P(甲胜)

所以P(甲胜)$= \alpha/[1-(1-\alpha)(1-\beta)]$.

5.电路元件实例

例：元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记$A_i =$ “第i个元件正常工作”,$p_i = P(A_i)$,

5.电路元件实例

例：元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记$A_i =$ “第i个元件正常工作”,$p_i = P(A_i)$,

- 两个元件的串联系统:$P(A_1A_2) = p_1p_2$

5.电路元件实例

例：元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记A_i = “第i个元件正常工作”,$p_i = P(A_i)$,

- 两个元件的串联系统:$P(A_1A_2) = p_1p_2$
- 两个元件的并联系统:

$$P(A_1 \cup A_2) = p_1 + p_2 - p_1p_2 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$$

1.试验独立性的定义

若试验E_1的任一结果与试验E_2的任一结果都是相互独立的事件，则称这两个试验相互独立，或称独立试验.

2.n 重伯努里试验

2.n 重伯努里试验

- 伯努里试验：
  若某种试验只有两个结果(成功、失败；黑球、白球；正面、反面)，则称这个试验为伯努里试验.

2.n 重伯努里试验

- 伯努里试验：
  若某种试验只有两个结果(成功、失败；黑球、白球；正面、反面)，则称这个试验为伯努里试验.
- 在伯努里试验中，一般记“成功”的概率为p.

2.n 重伯努里试验

- 伯努里试验：
  若某种试验只有两个结果(成功、失败；黑球、白球；正面、反面)，则称这个试验为伯努里试验.
- 在伯努里试验中，一般记“成功”的概率为p.
- n 重伯努里试验：
  n次独立重复的伯努里试验

2.n 重伯努里试验成功的次数

2.n 重伯努里试验成功的次数

- 在n 重伯努里试验中，记成功的次数为X.

2.n 重伯努里试验成功的次数

- 在n 重伯努里试验中，记成功的次数为X.
- X 的可能取值为：$0, 1, \ldots\ \ldots, n$

2.n 重伯努里试验成功的次数

- 在n 重伯努里试验中，记成功的次数为X.
- X 的可能取值为：$0, 1, \ldots\ \ldots, n$
- X 取值为k 的概率为：

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

1.习题订正

P51 习题3：把$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$表示成$n$个两两互不相容事件的和。

P52习题19：从n双不同的鞋子中任取$2r(2r < n)$只，求下列事件发生的概率：

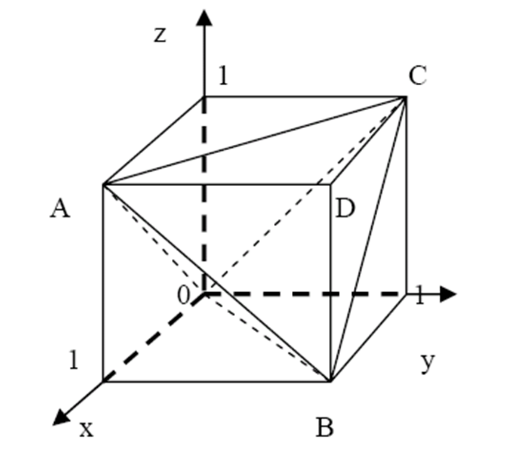
（1）没有成对的鞋子；

（2）只有一对成对的鞋子；

（3）恰有两对鞋子；

（4）恰有r对鞋子；

2.习题



P53习题30图

3.习题

P53习题30：在线段$[0,1]$上任意投三个点，问由0至三点的三线段能构成三角形与不能构成三角形这两个事件中哪个事件的概率大？

P53习题34：某班有n个士兵，每人各有一枪，在一次夜间紧急集合中，若每人随机地取走一枝枪，

(i)问至少有一人拿到自己枪的概率;

(ii)恰有$k(k<n)$个人拿到自己枪的概率。

P54习题40：已知：

$$P(AB)=P(A)P(B),\ \ AB\subset C,\ \ A^cB^c\subset C^c$$

证明：

$$P(AC)\geq P(A)P(C)$$

4.习题

P102习题8：飞机由三个不同的部分遭到射击，在第一部分被击中一弹或第二部分被击中两弹，或第三部分被击中三弹时，飞机才能被击落，其击中率与每一部分的面积成正比，设三个部分面积的百分比为0.1, 0.2, 0.7。若已中两弹，求击落飞机的概率。

P103 习题11：

P104 习题31：

5.内容小结

(Ω, F, P)

样本空间:

事件: 事件的运算，事件的独立性，事件域的公理化定义

概率: 概率的频率解释，公理化定义，性质，条件概率。

加法公式，乘法公式，全概率公式，Bayes公式

6.几个具体的概型

- 古典概型
- 几何概型
- 贝努里概型

掌握一个概型，要了解：

（1）概型的特征；

（2）概型的基本问题；

（3）概型的实例和应用；

（4）使用的基本工具。

7.古典概型的计算问题

例1：把n根手杖都折断成一长一短的两小段，把这$2n$小段任意配成n对，接成新的手杖，试求：

（1）这些手杖都接成原来样子的概率；

（2）所有长的小段都与短的配对的概率。

例2：（分组问题）：在16人中进行的国际乒乓球比赛中，有1名德国人，3名中国人。比赛分四组，每组4人，假定分组时随机的，试求:

（1）3名中国人和1名德国人在同一组的概率；

（2）3名中国人分在三个不同组的概率。

例3：（游程问题）：一批产品共$n+m$件，其中有m件次品，n件正品$(m<n)$。若逐件进行检查，求次品不接连出现的概率。

8.古典概型的计算问题

例4：掷n次均匀硬币，求出现正面的次数多于反面的次数的概率。

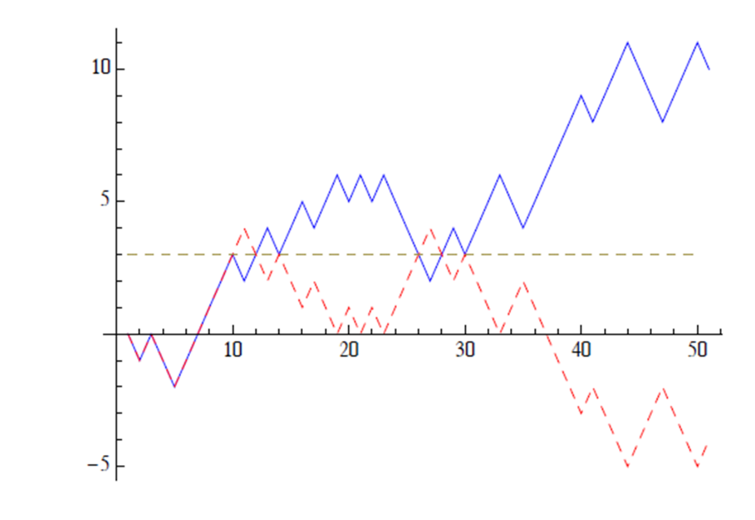
例5：甲掷$n+1$次均匀硬币，乙掷n次，求甲掷出正面的次数多于乙掷出正面的次数的概率。

例6：（反射原理）设袋中有n个白球和m个黑球$(n>m)$，现在随机地接连从袋中不放回取球，直到将球全部取出，试求：

(a)在取球过程中，在某一时刻取出的白球数和黑球数相等的概率;

(b)白球数总比黑球数多的概率。

9.反射原理图示



反射原理的图

10.古典概型的计算问题

例7：假定在一次选举中，候选人甲得a张票，候选人乙得b张票，$(a>b)$ 试求在计票过程中，甲的票数始终比乙的票数多的概率。

例8：剧院售票处前有$2n$个人排队买票，其中n个人只有50元钱一张的钞票，其余n个人只有100元钱一张的钞票。开始售票时售票处无零钱可找，而每个人只买一张50元钱的戏票，求售票处不会找不出钱的概率。

例9：从$1,2,\ldots,10$这十个数字中随机地有放回地取7个数字，试求：

(1)7个数字之和为10的概率；

(2) 7个数字之和为20的概率。

例10：有mn个球，其中有1个白球和1个黑球，其余都是红球，把这mn个球放入m个袋中，每袋放n个球，求黑球与白球放在同一袋中的概率。

11.全概率公式的应用

例12：接连掷一枚均匀硬币，直到连续出现两次正面为止。求此事件恰好出现在第n次的概率。

例13：甲袋中有9个白球和1只黑球，乙袋中有10只白球，每次从甲乙两袋中随机各取一球交换放入另一袋中，这样做了3次，求黑球出现在甲袋中的概率。

例14：n个人进行游戏。其方法是从装有m个黑球，$n-m$个白球的箱子中依次每人取一球。问每人取到黑球的概率是否相等？

12.事件分析与概率计算

例15：点球决胜中，A队射进每只球的概率为p，B队射进每只球的概率为q，假定各次射门相互独立，多射进一球者便取胜，求A队取胜的概率。

例16：设A, B是试验E的两个互斥事件。已知$P(A) = p, P(B) = q, p > 0, q > 0$且$p + q < 1$，求当$E$独立重复进行时，事件$A$发生在事件$B$发生之前的概率。

例17：父、母、子3人举行比赛，每局总有一人胜一人负（没有和局），每局的优胜者就与未参加此局比赛的人再进行比赛，如果某人首先胜了两局，则他就是整个比赛的优胜者，由父决定第一局哪两人参加，其中儿子实力最强，父亲为了使自己得胜的概率达到最大，问他应该决定第一局由哪两个参加比赛？（假定每个人在整个比赛中胜其他人的概率时不变的）

1.随机变量的背景

为什么要引进随机变量?

(1) 由第一、二章知我们研究的对象是随机事件的概率，由概率的公理化定义知，从数学上看，概率是定义在事件域上的集函数，这是一个新的，陌生的概念，是否可以将其与我们熟悉的点函数联系起来。

(2)在研究随机现象时，所关心的问题多与数值直接发生关系；可以借助于定义在样本空间上的某一函数表示。例如：

1.随机变量的背景

为什么要引进随机变量?

(1) 由第一、二章知我们研究的对象是随机事件的概率，由概率的公理化定义知，从数学上看，概率是定义在事件域上的集函数，这是一个新的，陌生的概念，是否可以将其与我们熟悉的点函数联系起来。

(2)在研究随机现象时，所关心的问题多与数值直接发生关系；可以借助于定义在样本空间上的某一函数表示。例如：

- 掷一颗骰子，出现的点数X: $1, 2, \ldots, 6$

1.随机变量的背景

为什么要引进随机变量?

(1) 由第一、二章知我们研究的对象是随机事件的概率，由概率的公理化定义知，从数学上看，概率是定义在事件域上的集函数，这是一个新的，陌生的概念，是否可以将其与我们熟悉的点函数联系起来。

(2)在研究随机现象时，所关心的问题多与数值直接发生关系；可以借助于定义在样本空间上的某一函数表示。例如：

- 掷一颗骰子，出现的点数X: $1, 2, \ldots, 6$
- n个产品中的不合格品个数Y : $0, 1, 2, \ldots, n$

1.随机变量的背景

为什么要引进随机变量?

(1) 由第一、二章知我们研究的对象是随机事件的概率，由概率的公理化定义知，从数学上看，概率是定义在事件域上的集函数，这是一个新的，陌生的概念，是否可以将其与我们熟悉的点函数联系起来。

(2)在研究随机现象时，所关心的问题多与数值直接发生关系；可以借助于定义在样本空间上的某一函数表示。例如：

- 掷一颗骰子，出现的点数X：$1, 2, \ldots, 6$
- n个产品中的不合格品个数Y：$0, 1, 2, \ldots, n$
- 某商场一天内来的顾客数Z：$0, 1, 2, \ldots\ldots$

1.随机变量的背景

为什么要引进随机变量?

(1) 由第一、二章知我们研究的对象是随机事件的概率，由概率的公理化定义知，从数学上看，概率是定义在事件域上的集函数，这是一个新的，陌生的概念，是否可以将其与我们熟悉的点函数联系起来。

(2)在研究随机现象时，所关心的问题多与数值直接发生关系；可以借助于定义在样本空间上的某一函数表示。例如：

- 掷一颗骰子，出现的点数X: $1, 2, \ldots, 6$
- n个产品中的不合格品个数Y： $0, 1, 2, \ldots, n$
- 某商场一天内来的顾客数Z： $0, 1, 2, \ldots \ldots$
- 某种型号电视机的寿命T： $[0, +\infty)$

2.随机变量的定义

设$\Omega=\{\omega\}$为某随机现象的样本空间，称定义在Ω上的满足适当条件的实值函数$X(\omega)$为随机变量.

2.随机变量的定义

设$\Omega=\{\omega\}$为某随机现象的样本空间，称定义在Ω上的满足适当条件的实值函数$X(\omega)$为随机变量.

- 随机变量$X(\omega)$是样本点ω的函数,其定义域为Ω,其值域为$R=(-\infty,+\infty)$
  若X 表示掷一颗骰子出现的点数，则$\{X=1.5\}$是不可能事件.

2.随机变量的定义

设$\Omega=\{\omega\}$为某随机现象的样本空间，称定义在Ω 上的满足适当条件的实值函数$X(\omega)$ 为随机变量.

- 随机变量$X(\omega)$是样本点ω的函数,其定义域为Ω,其值域为$R=(-\infty,+\infty)$
  若X 表示掷一颗骰子出现的点数，则$\{X=1.5\}$是不可能事件.
- 若X 为随机变量，则

$$\{X=k\},\{a<X\leq b\}! \ldots\ldots$$

均为随机事件.

即:$\{a<X\leq b\}=\{\omega:a<X(\omega)\leq b\}$

3.注意

3.注意

- $$\{X=k\}=\{X\le k\}-\{X<k\};$$
  $$\{a<X\le b\}=\{X\le b\}-\{X\le a\};$$
  $$\{X>b\}=\Omega-\{X\le b\}$$

3.注意

- $$\{X = k\} = \{X \leq k\} - \{X < k\};$$
  $$\{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} - \{X \leq a\};$$
  $$\{X > b\} = \Omega - \{X \leq b\}$$
- 同一样本空间可以定义不同的随机变量.

4.随机变量的分布函数

设X为一个随机变量，对任意实数x，称:

$$F(x) = P(X < x)$$

为X 的分布函数.

5.分布函数的性质

基本性质：（定理3.1.1）

5.分布函数的性质

基本性质：（定理3.1.1）

- F(x) 单调不降；

5.分布函数的性质

基本性质：（定理3.1.1）

- F(x) 单调不降；
- 有界：$0 \leq F(x) \leq 1, F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1;$

5.分布函数的性质

基本性质：（定理3.1.1）

- F(x) 单调不降；
- 有界：$0 \leq F(x) \leq 1, F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1;$
- 左连续:$F(x-0) = F(x)$

5.分布函数的性质

利用分布函数计算事件的概率有如下公式:

$$P(X=a)=F(a+0)-F(a)$$

$$P(X\leq a)=F(a+0)$$

$$P(X\geq a)=1-F(a)$$

$$P(X>a)=1-F(a+0)$$

6.离散型随机变量

（a）特征:若随机变量X 可能取值的个数为有限个或可列个，则称X 为离散随机变量.

（b）分布列

设离散随机变量X 的可能取值为：

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$$

称$p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, \ldots\ldots$为X 的分布列

分布列也可用表格形式表示:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

7.分布列的特征性质

(1) $p_i \geq 0,$ (非负性)

(2) $\sum_i p_i = 1.$ (正则性)

一个随机变量即描述了一个概率空间

求离散随机变量的分布列应注意:

△ 确定随机变量的所有可能取值;

△ 计算每个取值点的概率.

8.注意

对离散随机变量的分布函数应注意：

8.注意

对离散随机变量的分布函数应注意：

- $F(x)$是递增的阶梯函数;

8.注意

对离散随机变量的分布函数应注意:

- F(x)是递增的阶梯函数;
- 其间断点均为左连续的;

8.注意

对离散随机变量的分布函数应注意:

- $F(x)$是递增的阶梯函数;
- 其间断点均为左连续的;
- 其间断点即为X的可能取值点;

8.注意

对离散随机变量的分布函数应注意：

- F(x)是递增的阶梯函数；
- 其间断点均为左连续的；
- 其间断点即为X的可能取值点；
- 其间断点的跳跃高度是对应的概率值.

8.例

已知X的分布列如下：

X	0	1	2
P	1/3	1/6	1/2

求X的分布函数.

解：

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1/3, & 0\le x<1 \\ 1/2, & 1\le x<2 \\ 1, & 2\le x \end{cases}$$

9.常用离散分布

泊松分布:若随机变量X 的概率分布为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \ k=0,1,\ldots\ldots$$

则称X 服从参数为λ 的泊松分布,记为$X\sim P(\lambda)$
二项分布记为 $X\sim B(n,p)$.

9.常用离散分布

泊松分布:若随机变量X 的概率分布为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,\ldots\ldots.$$

则称X 服从参数为λ 的泊松分布,记为$X\sim P(\lambda)$

二项分布记为 $X\sim B(n,p)$.

- X为n重伯努里试验中“成功”的次数,

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\ldots\ldots,n.$$

9.常用离散分布

泊松分布:若随机变量X 的概率分布为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,\ldots\ldots$$

则称X 服从参数为λ 的泊松分布,记为$X\sim P(\lambda)$
二项分布记为 $X\sim B(n,p)$.

- X为n重伯努里试验中“成功”的次数,

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\ldots\ldots,n.$$

- 当$n=1$时，称$b(1,p)$ 为$0-1$分布

10.超几何分布

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\text{ ,记为}X\sim\ h(n,N,M).$$

超几何分布对应于不返回抽样模型:

- ▷ N 个产品中有M 个不合格品,
- ▷ 从中抽取n个,不合格品的个数为X .

11.几何分布

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \quad k=1,2,\ldots\ldots$$

记为$X \sim Ge(p)$

11.几何分布

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \quad k=1,2,\ldots\ldots$$

记为$X \sim Ge(p)$

- X 为独立重复的伯努里试验中，“首次成功”时的试验次数.

11.几何分布

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \quad k=1,2,\ldots\ldots$$

记为$X\sim Ge(p)$

- X 为独立重复的伯努里试验中，“首次成功”时的试验次数.
- 几何分布具有无记忆性，即:

$$P(X>n+m \mid X>m)=P(X>n)$$

12.负二项分布(巴斯卡分布)

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r,\quad k=r,r+1,\ldots\ldots$$

记为:$X\sim Nb(r,p)$.

注意：X 为独立重复的伯努里试验中，“第r 次成功”时的试验次数.

13.注意

注：$\sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = 1$

证明：利用幂级数在收敛域内可逐项求导的性质

当 $|x| < 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-1) x^{k-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} (k-1)(k-2) x^{k-3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=3}^{\infty} C_{k-1}^{2} x^{k-3} = \frac{1}{(1-x)^3}$$

14.注意(续)

归纳地:

$$\sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^r}$$

令 $x = 1 - p$

$$\Longrightarrow \sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} (1-p)^{k-r} = \frac{1}{(p)^r}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = 1$$

15.泊松定理

(二项分布的泊松近似)（P93定理2.4.1）

在n重伯努里试验中，记p_n 为一次试验中成功的概率.若$np_n \to \lambda$则:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

16.泊松定理证明

证:记 $np_n = \lambda_n$

$$C_n^k P_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{\lambda_n^k}{k!}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}(-\lambda_n)\left(\frac{n-k}{n}\right)}$$

$\rightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 1, 2, \dots\dots$

泊松分布中参数 λ 的实际意义

16.例

某某厂产品不合格率为0.03，现将产品装箱，若要以不小于90%的概率保证每箱中至少有100 个合格品，则每箱至少应装多少个产品？

16.例(解)

解： 设每箱至少应装$100+n$个，每箱的不合格品个数为X，
则$X \sim B(100+n, 0.03)$
由题意: $P(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n} P_{100+n}(k) \geq 0.9$
$(100+n)0.03 = 3 + 0.03n \approx 3$ 取 $\lambda = 3$ 应用Poisson定理

$$\sum_{k=0}^{n} P_{100+n}(k) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} e^{-3} = 1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \geq 0.9$$

$\Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \leq 0.1$,查Poisson分布表,$\lambda = 3$
得$n+1=6, n=5$ 故每箱至少应装105个产品,才能符合要求.

17.二项分布中最可能出现次数的定义与推导

若$P(X=k) \geq P(X=j), j = X$可取的一切值，则称k为最可能出现的次数

记$p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots\ldots, n.$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p_{k-1}}{p_k} = \frac{(1-p)k}{p(n-k-1)} \leq 1 \\ \frac{p_k}{p_{k+1}} = \frac{(1-p)(k+1)}{p(n-k)} \geq 1 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad (n+1)p - 1 \leq k \leq (n+1)p$$

17.二项分布中最可能出现次数的定义与推导

若$P(X=k)\geq P(X=j), j=X$可取的一切值，则称k为最可能出现的次数

记$p_k=P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\ldots\ldots,n.$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{p_{k-1}}{p_k}=\frac{(1-p)k}{p(n-k-1)}\leq 1\\ \frac{p_k}{p_{k+1}}=\frac{(1-p)(k+1)}{p(n-k)}\geq 1\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\quad (n+1)p-1\leq k\leq (n+1)p$$

- 当$(n+1)p=$整数时,在$k=(n+1)p$与$(n+1)p-1$处的概率取得最大值;

17.二项分布中最可能出现次数的定义与推导

若$P(X=k)\geq P(X=j), j=X$可取的一切值，则称k为最可能出现的次数

记$p_k=P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\ldots\ldots,n.$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{p_{k-1}}{p_k}=\frac{(1-p)k}{p(n-k-1)}\leq 1\\ \frac{p_k}{p_{k+1}}=\frac{(1-p)(k+1)}{p(n-k)}\geq 1\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\quad (n+1)p-1\leq k\leq(n+1)p$$

- 当$(n+1)p=$整数时,在$k=(n+1)p$与$(n+1)p-1$处的概率取得最大值;
- 当$(n+1)p\neq$整数时，在$k=[(n+1)p]$处的概率取得最大值。

18.几何分布的无记忆性

(1) 如果X服从参数为p的几何分布，则：

$$P(X > n + m \mid X > m) = P(X > n);$$

(2) 设X是取正整数值的随机变量，如果对任意的正整数m,n有

$$P(X > n + m \mid X > m) = P(X > n)$$

则X服从几何分布。

16.例

[分赌注问题]：甲、乙二人赌博，各出赌注50元，共100元，每局甲、乙胜的机会均等，都是1/2。约定：谁先胜满3局则他赢得全部赌注100元，现已赌完3局，甲2胜1负，但因故中断赌博，问这100元赌注该如何分给2人，才算公平

[问题的一般化]：甲、乙二人赌博，各出赌注50元，共100元，每局甲胜的概率为p，乙胜的概率为$q=1-p$。约定：谁先胜t局则他赢得全部赌注100元，现甲胜$r(r<t)$局，乙胜$s(s<t)$局。但因故中断赌博，问这100元赌注该如何分给2人，才算公平?

19.连续型随机变量

一、连续型随机变量的定义

设随机变量X 的分布函数为$F(x)$,若存在非负可积函数$p(x)$ ，满足：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

则称X 为连续随机变量，称$p(x)$为概率密度函数，简称密度函数.

20.分布密度(密度函数)特征性质:

- $p(x) \geq 0$; (非负性)
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ (正则性)

满足以上两个条件的函数都可以看成某个连续随机变量的概率密度函数.

概率意义:$P(X \in (x-h, x+h)) \approx 1/2p(x)h$

21.注:

(1) $P\{a < X \leq b\} = P\{a < X < b\}$

$=\mathrm{P}\{\ \mathrm{a} \leq X < b\}$

$=\mathrm{P}\{\ \mathrm{a} \leq X \leq b\}$

$=\mathrm{F(b)\text{-}F(a)}.$

(2) $F(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的连续函数;

(3) $P(X = x) = F(x) - F(x-0) = 0;$

(4) 当$F(x)$ 在x点可导时,$p(x) = F'(x)$

当$F(x)$ 在x点不可导时,, 可令$p(x) = 0.$

22.离散型与连续型

离散型 连续型

1.分布列: $p_n = P(X = x_n)$(唯一) $\leftrightarrow$ 1.密度函数:$X \sim p(x)$(不唯一)

2.$F(x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$ $\leftrightarrow$ 2.$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$

3.$F(a-0) = F(a)$ $\leftrightarrow$ 3.$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a)$.

4.点点计较 $\leftrightarrow$ 4.$P(X = a) = 0$

5.$F(x)$为阶梯函数 $\leftrightarrow$ 5.$F(x)$为连续函数。

23.常见的连续型随机变量

- 正态分布
- 均匀分布
- 指数分布
- $\Gamma-$分布

24.正态分布

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},-\infty<x<\infty$$

记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中$\sigma>0,\mu$是任意实数.

- μ 是位置参数.
- σ是尺度参数.

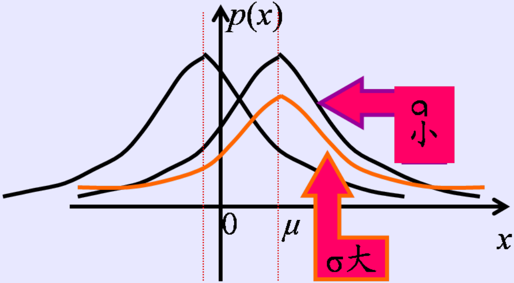
25.对密度函数的分析

(1) $p(x)$关于μ是对称的,在μ点$p(x)$取得最大值

(2) 若σ固定, μ改变,$p(x)$左右移动,形状保持不变.

(3) 若μ固定, σ改变,σ越大曲线越平坦;σ越小曲线越陡峭.

(4) $p(x)$是对数凹函数。



26.标准正态分布N(0, 1)

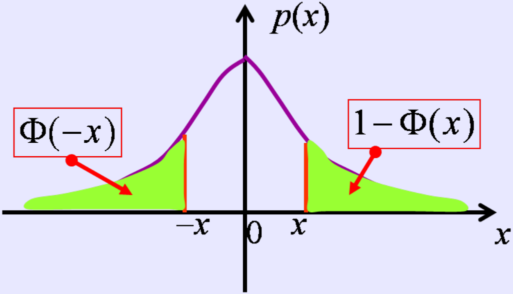
密度函数记为:

$$\varphi(x)$$

分布函数记为:

$$\Phi(x)$$

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



27.一般正态分布与标准正态分布

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 则

$$Y \sim N(0,1)$$

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

$$P(X < a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),\ P(X > a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

28.$\Phi(x)$的计算

(1) $x \geq 0$时,查标准正态分布函数表.
(2) $x \leq 0$时,用$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$
若$\sim N(0,1)$,则

28.$\Phi(x)$的计算

(1) $x \geq 0$时,查标准正态分布函数表.

(2) $x \leq 0$时,用$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

若$\sim N(0,1)$,则

- $P(X \leq a) = \Phi(a)$;

28.$\Phi(x)$的计算

(1) $x \geq 0$时,查标准正态分布函数表.

(2) $x \leq 0$时,用$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

若$\sim N(0,1)$,则

- $P(X \leq a) = \Phi(a);$
- $P(X > a) = 1 - \Phi(a);$

28.$\Phi(x)$的计算

(1) $x \geq 0$时,查标准正态分布函数表.

(2) $x \leq 0$时,用$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

若$\sim N(0,1)$,则

- $P(X \leq a) = \Phi(a)$;
- $P(X > a) = 1 - \Phi(a)$;
- $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$;

28.$\Phi(x)$的计算

(1) $x \geq 0$时,查标准正态分布函数表.

(2) $x \leq 0$时,用$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

若$\sim N(0,1)$,则

- $P(X \leq a) = \Phi(a)$;
- $P(X > a) = 1 - \Phi(a)$;
- $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$;
- 若$a \geq 0$,则

$$P(|X| < a) = P(-a < X < a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - [1 - \Phi(a)] = 2\Phi(a) - 1$$

29.3σ规则

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则

- $P(\mid X-\mu \mid < \sigma) = 0.6828.$
- $P(\mid X-\mu \mid < 2\sigma) = 0.9545$
- $P(\mid X-\mu \mid < 3\sigma) = 0.9973.$

$P(\mid X-\mu \mid < 3\sigma) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

$= \Phi\left(\frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma}\right)$

$= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 2 \times 0.9987 - 1 = 0.9974$

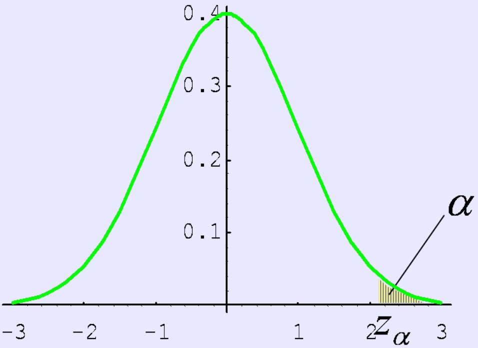
由3σ原理知,当$a < -3$ 时,$\Phi(a) \approx 0$;当$b > 3$时,$\Phi(b) \approx 1$

30.标准正态分布的上α分位数z_α

设$X \sim N(0,1), 0<\alpha<1$, 称满足

$$P(X > z_\alpha) = \alpha$$

的点z_α为X的上α分位数



常用数据:$z_{0.05} = 1.645, z_{0.025} = 1.96$

31.均匀分布

若X 的$d.f$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

则称X服从区间(a,b)上的均匀分布或称X 服从参数为a,b的均匀分布. 记作

$$X \sim U(a,b)$$

32.均匀分布的分布函数

若$X \sim U(a,b)$,则X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

$\forall (c,d)\subset(a,b)$,

$$P(c<X<d)=\int_{c}^{d}\frac{1}{b-a}dx=\frac{d-c}{b-a}$$

即X 落在(a,b)内任何长为$d-c$的小区间的概率与小区间的位置无关，只与其长度成正比. 这正是几何概型的情形.

33.指数分布

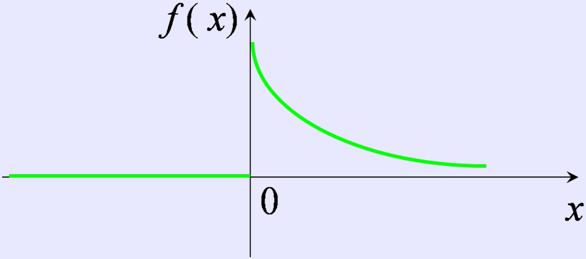
若X 的$d.f$ 为

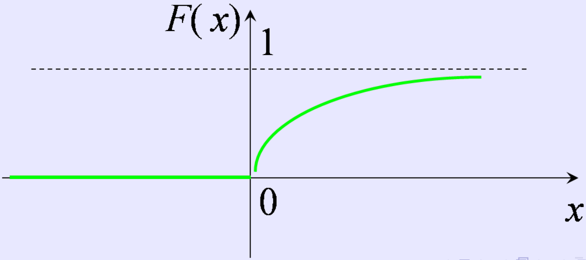
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$\lambda>0$为常数.则称X 服从参数为λ的指数分布
记作$X\sim E(\lambda)$,X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}$$

33.指数分布图像





34.指数分布的“无记忆性”

若$X \sim E(\lambda)$,则

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

事实上

$$P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)}$$

$$= \frac{1 - P(X \le s+t)}{1 - P(X \le s)} = \frac{1 - F(s+t)}{1 - F(s)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

- 故又把指数分布称为“永远年轻”的分布.

35.伽玛分布

$$p(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

记为$X \sim Ga(\alpha, \lambda)$,其中$\alpha > 0, \lambda > 0$.
称$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$为伽玛函数.
注:

- $\Gamma(1) = 1, \ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \ \Gamma(n+1) = n!$
- $Ga(1, \lambda) = Exp(\lambda)$

36.贝塔分布

$$p(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1$$

记为$X \sim Be(a,b)$,其中$a > 0, b > 0$.
称$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$为贝塔函数.
注:

- $B(a,b) = B(b,a)$
- $$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$
- $Be(1,1) = U(0,1)$

36.思考题

上海某年有9万名高中毕业生参加高考，结果有5.4万名被各类高校录取．考试满分为600分，540分以上有2025人，360分以下有13500人．试估计高校录取最低分．

1.随机向量（多维随机变量）

定义：若X, Y 是两个定义在同一个样本空间上的随机变量，则称(X, Y) 是两维随机向量.

同理可定义n 维随机向量（n维随机变量）.

2.随机向量的联合分布函数

定义：(以下仅讨论两维随机变量)
任对实数x 和y ,称

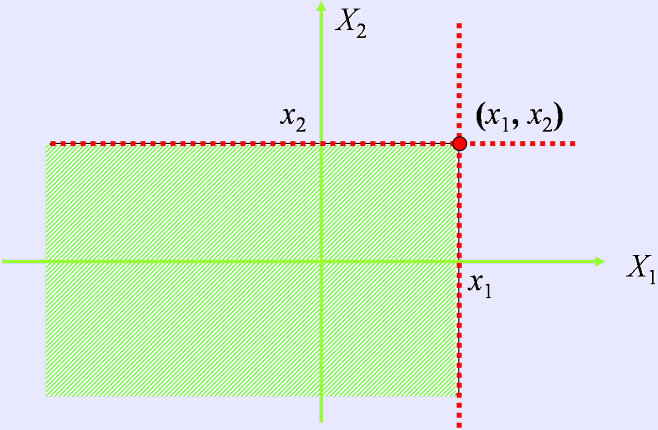
$$F(x,y)=P(X<x,Y<y)$$

为(X,Y) 的联合分布函数.

- 注意：

$F(x,y)$为(X,Y)落在点(x,y)的左下区域的概率

2.随机向量的联合分布函数



3.联合分布函数的基本性质

3.联合分布函数的基本性质

- $F(x,y)$关于x和y分别单调增. (单调性)

3.联合分布函数的基本性质

- $F(x,y)$关于x和y分别单调增. (单调性)
- $0 \leq F(x,y) \leq 1$, 且 $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1$. (有界性)

3.联合分布函数的基本性质

- $F(x,y)$关于x和y分别单调增. (单调性)
- $0 \le F(x,y) \le 1$, 且
  $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1$. (有界性)
- $F(x,y)$ 关于x 和y分别左连续 (左连续性)

3.联合分布函数的基本性质

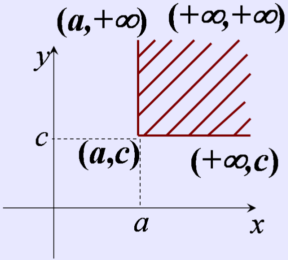
- $F(x,y)$关于x和y分别单调增. (单调性)
- $0 \le F(x,y) \le 1$, 且
  $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1$. (有界性)
- $F(x,y)$ 关于x 和y分别左连续 (左连续性)
- 当$a < b, c < d$ 时, 有 (非负性)
  $F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \ge 0.$

4.注意

$$P(X > a, Y > c) \neq 1 - F(a, c)$$

$$P(X > a, Y > c) = P(a < X < +\infty, c < Y < +\infty)$$

$$= 1 - F(+\infty, c) - F(a, +\infty) + F(a, c)$$



5.二维离散随机变量联合分布列

若(X,Y)的可能取值为有限对、或可列对，则称(X,Y)为二维离散随机变量.

称$p_{ij}=P(X=X_i,Y=y_j),i,j=1,2,\ldots,$ 为(X,Y) 的联合分布列，其表格形式如下:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

6.联合分布列的基本性质

(1) ：

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

(非负性)

(2) ：

$$\sum \sum p_{ij} = 1,$$

(正则性)

7.确定联合分布列的方法

(1) 确定随机变量(X, Y) 的所有取值数对.

(2) 计算取每个数值对的概率

(3) 列出表格.

7.例

将一枚均匀的硬币抛掷4次，X表示正面向上的次数，Y表示反面朝上次数。求(X,Y) 的联合分布列.

7.例(解)

解:

概率非零的(X,Y)可能取值对为:

X	Y	其对应的概率分别为:
0	4	$P(X=0,Y=4)=0.5^4=1/16$
1	3	$P(X=1,Y=3)=C_4^1\times 0.5\times 0.5^3=1/4$
2	2	$P(X=2,Y=2)=C_4^2\times 0.5^2\times 0.5^2=6/16$
3	1	$P(X=3,Y=1)=C_4^3\times 0.5^3\times 0.5^1=1/4$
4	0	$P(X=4,Y=0)=0.5^4=1/16$

7.例(解)

解：

列表为：

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	1/16
1	0	0	0	1/4	0
2	0	0	6/16	0	0
3	0	1/4	0	0	0
4	1/16	0	0	0	0

8.联合密度函数

设二维随机变量(X,Y) 的分布函数为$F(x,y)$，若存在非负可积函数$p(x,y)$使得

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dvdu$$

则称(X,Y) 为二维连续型随机变量,称$p(x,y)$ 为联合密度函数。

9.联合密度函数的基本性质

(1) :

$$p(x,y)\geq 0.$$

(非负性)

(2) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1,$$

(正则性)

- 注意:

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D p(x,y)dxdy$$

10.多项分布

若每次试验有r 种结果:$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_r$记

$$P(A_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, r$$

记X_i为n次独立重复试验中A_i 出现的次数.
则$(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_r)$的联合分布列为:

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots\ldots, X_r = n_r) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}$$

11.多维超几何分布

口袋中有N 只球，分成r 类,第i种球有N_i 只，

$$N_1 + N_2 + \ldots \cdots + N_r = N.$$

从中任取n只，记X_i为取出的n只球中，第i种球的只数.
则$(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_r)$的联合分布列为：

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots\ldots, X_r = n_r) = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\ldots\ldots\binom{N}{n_r}}{C_N^n}$$

12.二维均匀分布

若二维连续随机变量(X,Y) 的联合密度为：

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

其中S_D为D的面积.则称(X,Y) 服从D上的均匀分布，记为

$$(X,Y)\sim U(D).$$

13.二维正态分布

若二维连续随机变量(X, Y) 的联合密度为：

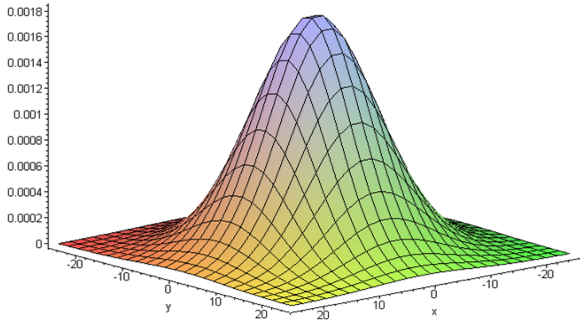
$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}$$

则称(X, Y) 服从二维正态分布，记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$$

13.二维正态分布密度函数图



13.例

若

$$(X,Y) \sim p(x,y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

试求$P\{(X,Y) \in D\}$,其中D为$2x+3y \leq 6$

13.例(解)

解：

解:

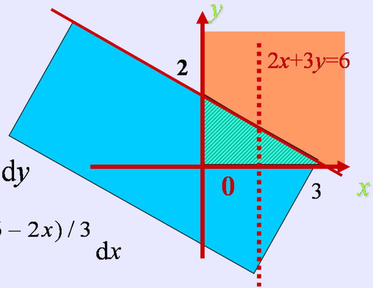
$$P\{(X,Y)\in D\}$$

$$=\iint\limits_{2x+3y\le 6} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^3 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{3}(6-2x)} 6e^{-(2x+3y)}\mathrm{d}y$$

$$=6\int_0^3 e^{-2x}\left(-\frac{1}{3}e^{-3y}\right)\Bigg|_0^{(6-2x)/3}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^3 (e^{-2x}-e^{-6})\mathrm{d}x \quad =1-7e^{-6}$$



14.例

设二维随机变量(X, Y) 的密度函数为:

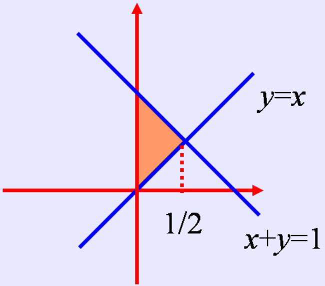
$$p(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

求概率$P\{X+Y\leq 1\}$.

14.例(解)

解：

$$P\{X+Y\leq 1\}=\int_0^{1/2}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy$$
$$=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$$



14.边际分布

已知二维随机变量(X,Y) 的分布，
是否可由(X,Y)的联合分布求出X 和Y各自的分布？

15.边际分布函数

已知(X,Y) 的联合分布函数为$F(x,y)$ 则

$$X \sim F_X(x) = F(x,+\infty)$$

$$Y \sim F_Y(y) = F(+\infty,y)$$

16.边际分布列

已知(X,Y) 的联合分布列为p_{ij} 则
X的分布列为：

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{i.}$$

Y 的分布列为：

$$p_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{.j}$$

16.边际分布列图

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	

17.边际密度函数

已知(X,Y) 的联合密度函数为$p(x,y)$

则

X 的密度函数为：

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy$$

Y 的密度函数为：

$$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx$$

18.注意

18.注意

- 由联合分布可以求出边际分布.

18.注意

- 由联合分布可以求出边际分布.
- 但由边际分布一般无法求出联合分布.

18.注意

- 由联合分布可以求出边际分布.
- 但由边际分布一般无法求出联合分布.
- 所以联合分布包含更多的信息.

18.注意

- 由联合分布可以求出边际分布.
- 但由边际分布一般无法求出联合分布.
- 所以联合分布包含更多的信息.
- 二维正态分布的边际分布是一维正态：若

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho).$$

则

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

19.证明

$$f_X(x) = \frac{e^{-x^2/2(1-\rho^2)}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2-2\rho xy)/2(1-\rho^2)} dy$$

$$= \frac{e^{-x^2/2(1-\rho^2)}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2-2\rho xy+\rho^2x^2-\rho^2x^2)/2(1-\rho^2)} dy$$

$$= \frac{e^{-x^2(1-\rho^2)/2(1-\rho^2)}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(y-\rho x)^2/2(1-\rho^2)}}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

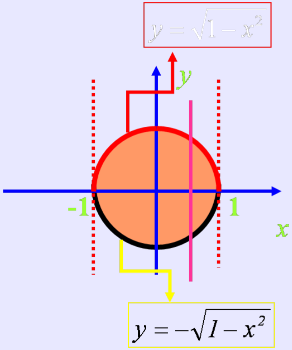
19.例

(二维均匀分布的边际分布不一定是一维均匀分布.) 设(X, Y)服从区域$D = \{(x, y), x_2 + y_2 < 1\}$ 上的均匀分布，求X的边际密度$p(x)$.

19.例(解)

解： 由题意得

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x_2+y_2\leq 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$



19.例(解)

当$|x|>1$时，$p(x,y)=0$，所以$p(x)=0$

当$|x|\le 1$时，

$$p(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

不是均匀分布

20.条件分布(1)

二维离散r.v.的条件分布律

设二维离散型$r.v.(X,Y)$的分布

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\ldots$$

若 $p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}>0$ 则称

$$\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}=P(Y=y_j\mid X=x_i)\quad j=1,2,\ldots$$

为在$X=x_i$ 的条件下, Y 的条件分布律

20.条件分布(2)

若 $p_{.j} = P(Y = y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} > 0$ 则称

$$\frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} = P(X = x_i \mid Y = y_j) \quad j = 1, 2, \ldots$$

为在$Y = y_j$ 的条件下, X 的条件分布律

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j \mid X = x_i)$$

$$= P(Y = y_i)P(X = x_i \mid Y = y_j), i, j = 1, 2, \ldots$$

20.条件分布(3)

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i\mid Y=y_j)P(Y=y_j),\quad i,j=1,2,\ldots$$

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P(Y=y_j\mid X=x_i)P(X=x_i),\quad i,j=1,2,\ldots$$

20.例

把三个球等可能地放入编号为1, 2, 3的三个盒子中, 每盒可容球数无限. 记X 为落入1号盒的球数, Y 为落入2 号盒的球数，求

(1) 在$Y=0$ 的条件下，X的分布律;

(2) 在$X=2$的条件下，Y的分布律.

21.求解(1)

先求联合分布，

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)$$

$$=C_3^i\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{3-i}C_{3-i}^j\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{3-i-j}$$

,$j=0,\ldots,3-i;i=0,1,2,3;$ 其联合分布与边缘分布如下表所示

21.求解(1)

$Y \backslash X$ (p_{ij})	0	1	2	3	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0	$\frac{1}{27}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	1

21.求解(2)

$$P(X=i \mid Y=0)=\frac{P(X=i,Y=0)}{P(Y=0)}$$

$$=\frac{P(X=i,Y=0)}{8/27} \qquad i=0,1,2,3$$

将表中第一行数据代入得条件分布:

X	0	1	2	3
$P(X=i \mid Y=0)$	1/8	3/8	3/8	1/8

21.求解(3)

当$X=2$时，Y只可能取0与1.将表中第三列数据代入下式

$$P(Y=j \mid X=2)=\frac{P(X=2, Y=j)}{2/9}, \quad j=0,1$$

得Y 的条件分布:

X	0	1
$P(Y=j \mid X=2)$	$1/2$	$1/2$

22.二维连续型随机变量的条件分布和条件密度

当X 连续时，条件分布不能用$P(X=x_i \mid Y=y_j)$ 来定义，因为

$$P(X=x_i \mid Y=y_j) \equiv 0$$

而应该用

$$P(X \leq x \mid Y=y)$$

来定义.

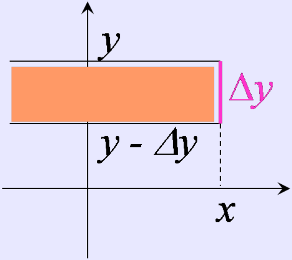
23.条件密度公式推导

设 $\triangle y > 0$

$$P(X \le x \mid y - \triangle y < Y \le y)$$

$$= \frac{P(X \le x, y - \triangle y < Y \le y)}{P(y - \triangle y < Y \le y)}$$

$$= \frac{F(x,y) - F(x, y - \triangle y)}{F_Y(y) - F_Y(y - \triangle y)}$$

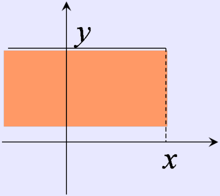


23.条件密度公式推导(续)

$$\lim_{\triangle y \to 0+} \frac{\Big[F(x, y-\triangle y) - F(x,y)\Big]/(-\triangle y)}{\Big[F_Y(y-\triangle y) - F_Y(y)\Big]/(-\triangle y)}$$

$$= \frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\frac{dF_Y(y)}{dy}} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)du}{f_Y(y)}$$

$$= P(X \le x \mid Y = y)$$



24.条件分布函数

若$f(x,y)$ 在点(x,y) 连续，$f_Y(y)$在点y处连续且$f_Y(y)>0$，则称

$$\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\frac{dF_Y(y)}{dy}} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)du}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du$$

为$Y=y$ 时，X的条件分布函数，记作

$$F_{X|Y}(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du$$

25.条件分布函数(续)

称

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为$Y = y$ 的条件下X 的条件$p.d.f.$类似地，称

$$F_{Y|X}(y \mid x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,\nu)}{f_X(x)} d\nu$$

为$X = x$的条件下Y的条件分布函数;称

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

为$X = x$ 的条件下Y的条件$p.d.f.$

26.注意(1)

- $F_{X|Y}(x \mid y), f_{X|Y}(x \mid y)$ 仅是x的函数,y是常数, 对每一$f_Y(y) > 0$ 的y 处, 只要符合定义的条件, 都能定义相应的函数. $F_{Y|X}(y \mid x), f_{Y|X}(y \mid x)$相仿论述.

$$f(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y \mid x) \qquad f_X(x) > 0$$

$$= f_Y(y) f_{X|Y}(x \mid y) \qquad f_Y(y) > 0$$

26.注意(2)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|Y}(x\mid y)f_Y(y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y|X}(y\mid x)f_X(x)dx$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_{Y|X}(y\mid x)f_X(x)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_{X|Y}(x\mid y)f_Y(y)}{f_X(x)}$$

27.例2

已知(X,Y)服从圆域$x_2+y_2\leq r_2$上的均匀分布,求$f_{X|Y}(x\mid y),f_{Y|X}(y\mid x)$

解:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2}, & x_2+y_2<r^2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

由前例知:

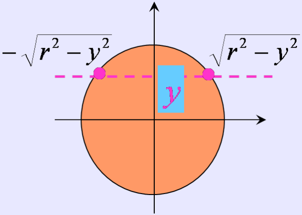
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & -r<x<r\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

同理:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & -r<y<r\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

27.例2(续)

于是由条件分布的定义知：当$r < y < r$ 时，

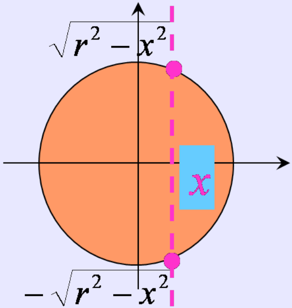


$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}, & -\sqrt{r^2-y^2}<x<\sqrt{r^2-y^2}\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$---$这里y是常数，当$Y=y$时，$X\sim U(-\sqrt{r^2-y^2},\sqrt{r^2-y^2})$

27.例2(续)

当$r < x < r$ 时，



$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}, & -\sqrt{r^2-x^2} < y < \sqrt{r^2-x^2} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$---$这里x是常数，当$X = x$时，$Y \sim U(-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2})$

28.例3

已知$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

求$f_{X|Y}(x\mid y)$

解:

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}}$$

28.例3(续)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[(x-\mu_1)-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right]^2}$$

$$f_{X|Y}(x \mid y) \sim N\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$

同理,

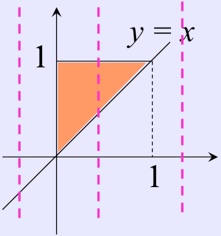
$$f_{Y|X}(y \mid x) \sim N\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

29.例4

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

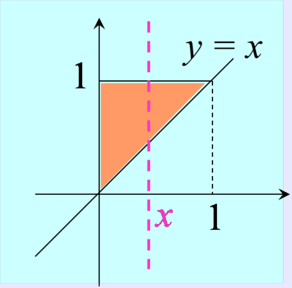
求$f_{X|Y}(x\mid y), f_{Y|X}(y\mid x)$

解:



$$f_X(x)=\begin{cases} \int_x^1 8xy dy, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} = \begin{cases} 4x(1-x^2), & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

29.例4(续)



$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y 8xydx, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4y^3, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

29.例4(续)

当$0 < y < 1$时,

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2x}{y^2}, & 0 \le x \le y \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

当$0 < x < 1$ 时,

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{2y}{1-x^2}, & x \le y \le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

30.随机变量间的独立性

两个r.v. 的相互独立性

定义:设(X,Y)为二维r.v. 若对任何实数x,y 都有

$$P(X<x,Y<y)=P(X<x)P(Y<y)$$

则称$r.v.X$和Y 相互独立

由定义知:二维$r.v.(X,Y)$ 相互独立 $\Longleftrightarrow$

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

$\Longleftrightarrow$

$$P(a<x<b,c<y<d)=P(a<x<b)P(c<y<d)$$

31.随机变量独立的具体表达

离散型 X与Y 独立 $\Longleftrightarrow$ 对一切i,j 有

$$p_{ij}=p_{i.}p_{.j}$$

即: $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i,Y=y_j)$
连续型 X与Y 独立 $\Longleftrightarrow$ 对任何x,y 有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\quad (a.e)$$

- 二维随机变量(X, Y) 相互独立, 则边缘分布完全确定联合分布. 二维连续$r.v.(X,Y)$ 相互独立$\Longrightarrow$

$$f_X(x)=f_{X|Y}(x\mid y)\qquad (f_Y(y)>0)$$

$$f_Y(y)=f_{Y|X}(y\mid x)\qquad (f_X(x)>0)$$

32.注意

32.注意

- X 与Y是独立的其本质是：任对实数a, b, c, d有

$$P(a < x < b, c < y < d) = P(a < x < b)P(c < y < d)$$

32.注意

- X 与Y是独立的其本质是：任对实数a,b,c,d有

$$P(a<x<b,c<y<d)=P(a<x<b)P(c<y<d)$$

- X 与Y 是独立的，则$g(X)$与$h(Y)$也是独立的.

32.注意

- X 与Y是独立的其本质是：任对实数a,b,c,d有

$$P(a<x<b,c<y<d)=P(a<x<b)P(c<y<d)$$

- X 与Y 是独立的，则$g(X)$与$h(Y)$也是独立的.
- 若联合密度$p(x,y)$ 可分离变量，即

$$p(x,y)=g(x)h(y)$$

则X与Y 独立。

32.注意

- X 与Y是独立的其本质是：任对实数a,b,c,d有

$$P(a<x<b,c<y<d)=P(a<x<b)P(c<y<d)$$

- X 与Y 是独立的，则$g(X)$与$h(Y)$也是独立的.
- 若联合密度$p(x,y)$ 可分离变量，即

$$p(x,y)=g(x)h(y)$$

则X与Y 独立。

- 若(X,Y) 服从二元正态$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 则X与Y 独立的充要条件是

$$\rho=0$$

33.例

(X, Y) 的联合分布列为:

$X \backslash Y$	0	1
0	0.3	0.4
1	0.2	0.1

问X与Y 是否独立?

解:边际分布列分别为:

X	0	1
P	0.7	0.3

Y	0	1
P	0.5	0.5

因为$P(X=0, Y=0)=0.3$

$P(X=0)P(Y=0)=0.7\times 0.5=0.35$ 所以不独立

34.例

已知(X, Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y}, & 0x>0,\ \ y>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

问X 与Y 是否独立?

解: 边际分布密度分别为:

$$p(x)=\begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dy=e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

$$p(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\leq 0 \end{cases}$$

所以X 与Y 独立,注意: p(x, y) 可分离变量.

35.命题

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0$

证:对任何x,y有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

35.命题(续)

取$x=\mu_1, y=\mu_2$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

故

$$\rho=0$$

将$\rho=0$代入$f(x,y)$ 即得

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

36.命题

设$f(x,y)$是连续二维$r.v.(X,Y)$的联合$d.f.r(x),g(y)$为非负可积函数，且

$$f(x,y)=r(x)g(y)\quad (a.e)$$

则X,Y相互独立,且

$$f_X(x)=\frac{r(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}r(x)dx}\quad (a.e)$$

36.命题(续)

$$f_Y(y) = \frac{g(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy} \quad (a.e)$$

对于分布函数也有类似结果:设$F(x,y)$是二维连续$r.v.(X,Y)$的联合分布函数，则(X,Y)相互独立的充要条件为

$$F(x,y) = R(x)G(y)$$

且

$$F_X(x) = \frac{R(x)}{r(+\infty)}$$

$$F_Y(y) = \frac{G(y)}{G(+\infty)}$$

37.命题

设X, Y 为相互独立的$r.v.u(x), v(y)$ 为连续函数,
则$U = u(X), V = v(Y)$ 也相互独立.即

独立$r.v.$的连续函数仍独立.

38.证明

不妨设(X,Y)是连续型随机向量，

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

因此，$F_{UV}(u,v)=P(U\le u,V\le v)$
$=P(u(X)\le u,v(Y)\le v)$
$=\int\int_{u(x)\le u,v(y)\le v}f_X(x)f_Y(y)dxdy$
$=P(u(X)\le u)P(v(Y)\le v)=F_U(u)F_V(v)$

系：若X,Y 为相互独立的$r.v.$,则$aX+b,cY+d$也相互独立；X_2,Y_2 也相互独立；

39.例

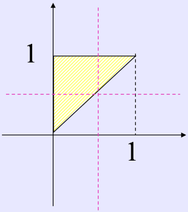
已知(X,Y) 的联合$d.f.$为

$$f_2(x,y)=\begin{cases} 8xy, & 0<x<y,0<y<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

讨论X,Y 是否独立？

40.解

由图知边缘$d.f.$ 为



$$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

显然，

$$f_2(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$$

故X,Y 不独立

1.离散型随机变量函数的分布列

设$r.v.X$ 的分布列为

$$P(X=x_k)=p_k,\qquad k=1,2,\dots$$

由已知函数$g(x)$可求出$r.v.Y$ 的所有可能取值，则Y 的概率分布为

$$P(Y=y_i)=\sum_{k:g(x_k)=y_i} p_k, i=1,2,\dots$$

2.例

已知X的概率分布为

X	-1	0	1	2
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

求$Y = X_2$ 的分布列

解：

Y	0	1	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$

3.连续性r.v.函数的分布

已知X的$d.f.$ $f(x)$ 或分布函数,求$Y=g(X)$ 的$d.f.$

方法:

- 从分布函数出发
- 用公式直接求d.f.

4.例

已知X的$d.f.$为$f_X(x), Y = aX + b, a, b$为常数，且$a \neq 0$,求$f_Y(y)$

解:$F_Y(y) = P(Y < y)$

$= P(aX + b < y)$

当$a > 0$ 时，

$$F_Y(y) = P\left(X \leq \frac{1}{a}(y - b)\right)$$

$$= F_X\left(\frac{1}{a}(y - b)\right)$$

$$\Longrightarrow \quad f_Y(y) = \tfrac{1}{a} f_X\left(\tfrac{1}{a}(y - b)\right)$$

4.例(续)

当$a<0$ 时，

$$F_Y(y)=P\left(X>\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$=1-F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

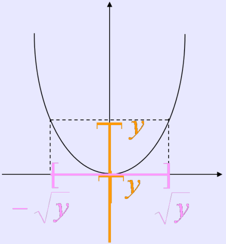
$$\Longrightarrow \quad f_Y(y)=-\tfrac{1}{a}f_X\left(\tfrac{1}{a}(y-b)\right)$$ 故

$$f_Y(y)=\frac{1}{|\,a\,|}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

5.例

已知$X \sim N(0,1), Y = X^2$,求$f_Y(y)$

解:从分布函数出发,$F_Y(y) = P(Y < y)$



当$y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$

当$y > 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(X^2 < y) \\
&= P(-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}) \\
&= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})
\end{aligned}
$$

5.例(续)

从而

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), & y > 0 \end{cases}$$

故

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\Big(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\Big), & y > 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}y^{1/2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \end{cases}$$

6.例

$Y = \cos(X)$,X服从区间$(0, 2\pi]$的均匀分布
$Y = \cos(X)$在区间$-1 < y < 1$上有两个反函数, $\to$
$x_0 = \cos^{-1}(y), x_1 = 2\pi - x_0$

$$\frac{dy}{dx}|_{x_0} = -\sin(x_0) = -\sin(\cos^{-1}(y)) = -\sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}|_{x_1} = -\sin(2\pi - x_0) = \sin(x_0) = \sqrt{1-y^2}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\therefore f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$= \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \quad ,若 -1 < y < 1$$

6.例(续)

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{-1} f_Y(y)dy + \int_{-1}^{y} f_Y(y)dy \\
&= 0 + \int_{-1}^{y} f_Y(y)dy \\
&= \int_{-1}^{y} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy \\
&= \left[\frac{1}{\pi}\sin^{-1} y\right]_{-1}^{y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sin^{-1} y
\end{aligned}
$$

$$
F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sin^{-1} y}{\pi}, & -1 \le y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}
$$

7.二维随机变量变换

问题:已知二维随机变量(X,Y) 的分布，如何求出$Z=g(X,Y)$的分布?

方法:将与Z有关的事件转化成X ，Y的事件。

8.离散与连续情形

- 当(X,Y)为离散$r.v.$时, Z也离散

$$Z = z_k = g(x_{i_k}, y_{j_k})$$

$$P(Z = z_k) = \sum_{g(x_{i_k}, y_{j_k}) = z_k} P(X = x_{i_k}, Y = y_{j_k}) \; k = 1, 2, \ldots$$

- 当(X,Y)为连续$r.v.$时,

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(g(X,Y) < z)$$

$$= \iint_{D_z} f(x,y)dxdy$$

其中$D_z : \{(x,y) \mid g(x,y) < z\}$

9.例

设X与Y 独立，且X,Y 等可能地取值0,和1.
求$Z=max(X,Y)$的分布列.
解:

X	0	1
P	1/2	1/2

Y	0	1
P	1/2	1/2

$Z=max(X,Y)$的取值为:$0,1$

$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)=P(X=0)(Y=0)=1/4$

$P(Z=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=3/4$

10.极值分布

设$X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$, 独立同分布，其分布函数和密度函数分别为$F_X(x)$ 和$p_X(x)$.

若记$Y = max(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n), Z = min(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$

- 则Y 的分布函数为:$F_Y(y) = [F_X(y)]^n$
- Y 的密度函数为:$p_Y(y) = n[F_X(y)]^{n-1}p_X(y)$
- Z 的分布函数为:$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^n$
- Z 的密度函数为:$p_Z(z) = n[1 - F_X(z)]^{n-1}p_X(z)$

11.极值分布推导

设连续随机变量X,Y 相互独立,
$X \sim F_X(x), Y \sim F_Y(y), M = max\{X,Y\}, N = min\{X,Y\}$,
求M,N 的分布函数.

$$F_M(u) = P(max\{X,Y\} < u)$$

$$= P(X < u, Y < u)$$

$$= P(X < u)P(Y < u)$$

$$= F_X(u)F_Y(u)$$

11.极值分布推导(续)

$$F_N(\nu) = P(min\{X,Y\} < \nu)$$

$$= 1 - P(min\{X,Y\} > \nu)$$

$$= 1 - P(X \geq \nu, Y \geq \nu)$$

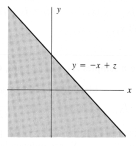
$$= 1 - P(X \geq \nu)P(Y \geq \nu)$$

$$= 1 - [1 - F_X(\nu)][1 - F_Y(\nu)].$$

12.和的分布

$Z = X + Y$，求$F_Z(z)$ 和$f_Z(z)$

$$F_Z(z) = P[Z < z] = P[X + Y < z]$$



$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x'} f_{X,Y}(x', y') dy' dx'$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x', z - x') dx'$$

如果X 和Y 相互独，则

$\to$ $\mathsf{f}_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x') f_Y(z - x') dx'$

12.和的分布(续)

设离散随机变量X 与Y 独立，则$Z = X + Y$ 的分布列为

$$P(Z = z_l) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i)P(Y = z_l - x_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} P(X = z_l - y_j)P(Y = y_j)$$

13.卷积公式的应用

设X与Y 是独立同分布的标准正态变量，求$Z=X+Y$的分布.

解：

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\frac{(z-x)^2}{2}\right\}$$

$$=\ldots\cdots=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\frac{z^2}{2\times 2}\right\}$$

所以

$$Z=X+Y\sim N(0,2).$$

14.独立正态变量的线性组合仍为正态变量

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$ 且X_i 间相互独立，实数$a_1, a_2, \ldots, a_n$不全为零，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

15. 例

设X 与Y 相互独立，且$X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p)$
则

$$X+Y \sim B(n+m,p)$$

证$Z=X+Y$的可能取值为:$0,1,2,\ldots,n+m$

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i,Y=k-j)$$

$$=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-j)$$

$$=\sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} C_m^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i}$$

$$\overset{\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i} = C_{n+m}^k}{=} C_{n+m}^k p^k (1-p)^{n+m-k}$$

$k=0,1,2,\ldots\ldots,n+m$ 所以$X+Y \sim B(n+m,p)$

16. 问题三

已知(X,Y) 的分布，考虑(X,Y) 的函数

$$\begin{cases} U = g_1(X,Y) \\ V = g_1(X,Y) \end{cases}$$

求(U,V) 的分布.

17. 随机向量变换公式

若$\begin{cases} u = g_1(x,y) \\ v = g_1(x,y) \end{cases}$ 有连续偏导、存在反函数$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

则(U,V) 的联合密度为

$$p_{UV}(u,v) = p_{XY}(x(u,v), y(u,v)) \mid J \mid$$

其中J为变换的雅可比行列式:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$$

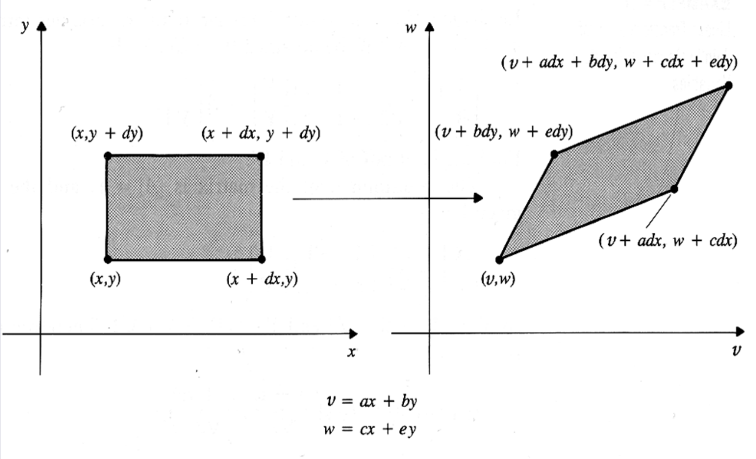
17. 二维随机向量的线性变换：

$$\begin{matrix} V = aX + bY \\ W = cX + dY \end{matrix}, \quad \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \mid ae - bc \mid \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

17. 二维随机向量的线性变换(续)



17. 二维随机向量的线性变换(续)

$$f_{X,Y}(x,y)dxdy \stackrel{\sim}{=} f_{V,W}(v,w)dP$$

dP：平行四边形的面积

$$f_{V,W}(v,w)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{\mid \frac{dP}{dxdy}\mid},\mid \frac{dP}{dxdy}\mid=\frac{\mid ae-bc\mid dxdy}{dxdy}=\mid ae-bc\mid=\mid A\mid$$

一般情形：$Z=AX$

$$f_Z(z)=\frac{f_X(A^{-1}z)}{\mid A\mid}$$

18.例

X, Y：相互独立的标准正态分，定义：

$$\begin{aligned} V &= (X^2 + Y^2)^{1/2} \\ W &= \arctan(X/Y) \end{aligned}$$

求：(V, W)的联合分布密度解：$x = v\cos w, y = v\sin w$

$$J(v,w) = \left| \begin{array}{cc} \cos w & -v\sin w \\ \sin w & v\cos w \end{array} \right| = v$$

18.例(续)

$$f_{V,W}(v,w) = f_{X,Y}(x(v,w), y(v,w)) | J(v,w) |$$

$$= \frac{v}{2\pi} e^{-(v^2\cos^2 w + v^2 \sin^2 w)/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} v e^{-v^2/2} \quad v \geq 0, 0 \leq w \leq 2\pi$$

$$f_V(v) = v e^{-v^2/2} \quad v \geq 0 \Longrightarrow$$

V:Rayleigh 随机变量
W:$(0,2\pi)$上的均匀分布

19.增补变量法

若要求$U=g_1(X,Y)$的密度$p_U(u)$，可增补一个变量$V=g_2(X,Y)$，先用变量变换法求出(U,V)的联合密度$p_{UV}(u,v)$，然后再由联合密度$p_{UV}(u,v)$，去求出边际密度$p_U(u)$

用此方法可以求出卷积公式、积的公式、商的公式

20.商的分布

已知(X,Y)的联合$d.f.f(x,y)$，令$Z=X/Y$,求$f_Z(z)$

$$\begin{cases} Z=X/Y \\ V=Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=ZV \\ Y=V \end{cases} \Rightarrow \mid J \mid = \mid v \mid$$

$$f_{ZV}(z,v)=f(zv,v)\mid v \mid$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_ZV(z,v)dv=\int_{-\infty}^{+\infty} f(zu,v)\mid v \mid dv$$

1.数字特征的引入背景

（1）实际问题的需要

（2）要完全得到分布有困难

（3）数字特征从某些侧面反映分布函数

2.数学期望的定义

A 离散型随机变量

设离散随机变量X的分布列为

$$P(X = x_n) = p_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

若级数$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$绝对收敛，则称该级数为$X$的数学期望，记为

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

3.例1

$X \sim B(n,p)$, 求$E(X)$.

解:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{(n-1)-k} = np$$

特例 若$Y \sim B(1,p)$, 则$E(Y) = p$

例2 $Poisson$分布 $EX = \lambda$

4.数学期望的定义

B.连续性随机变量

设连续随机变量X的密度函数为$p(x)$,若积分$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$绝对收敛，则称该积分为$X$的数学期望，记为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

5.例

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$E(X)$.

解:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{\frac{x-\mu}{\sigma}=u}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (u\sigma + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \mu$$

例4 Γ-分布

6.例

- 注意:不是所有的$r.v.$都有数学期望

例如：柯西($Cauchy$)分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+\pi^2)},\quad -\infty<x<+\infty$$

但

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi(1+\pi^2)}dx$$

发散

它的数学期望不存在!

C. 一般情形：$Riemanm-Stieltjes$ 积分

7.随机变量函数的数学期望

定理:设$Y=g(X)$ 是随机变量X的函数，若$E(g(X))$ 存在，则

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)P(X=x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx \end{cases}$$

7.例

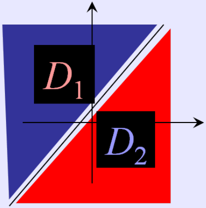
设$X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1), X,Y$ 相互独立，
求$E(max(X,Y))$.

解 $$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$E(\max\{X,Y\}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,y\}f(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{D_1}\max\{x,y\}f(x,y)dxdy$$

$$+ \iint_{D_2}\max\{x,y\}f(x,y)dxdy$$



7.例(续)

$$= \iint_{D_1} y \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy + \iint_{D_2} x \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{x}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \int_{y}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{x}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

$$= 4 \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

7.例(续)

$$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} rdr$$

$$= 4 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \pi$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

一般地，若$X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X, Y$相互独立，则

$$E(max\{X, Y\}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$E(min\{X, Y\}) = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

8.数学期望的性质

1. $E(C)=C$ 常数
2. $E(aX)=aE(X)$
3. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i+C\right)=\sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i)+C$$

4. 当X,Y 独立时，$E(XY)=E(X)E(Y)$.
5. 若存在数a使$P(X\geq a)=1$，则$E(X)\geq a$ ；

   若存在数b 使$P(X\leq b)=1$，则$E(X)\leq b$.

9.证明

注：性质4 的逆命题不成立，即若$E(XY)=E(X)E(Y)X,Y$不一定独立

证(性质5)

设X 连续，$d.f.$为$f(x)$, 分布函数为$F(x)$, 则

$$P(X\geq a)=1-P(X<a)$$

$$\Rightarrow\quad 1-F(a)=1\quad\Rightarrow\quad F(a)=0$$

$$\Rightarrow\quad F(x)=0,\quad x\leq a$$

$$\Rightarrow\quad f(x)=0,\quad x\leq a$$

故$E(X)=\int_a^{+\infty}xf(x)dx\geq\int_a^{+\infty}af(x)dx=a$

10.例

将4 个不同色的球随机放入4 个盒子中，每盒容纳球数无限，求空盒子数的数学期望.

解一：设X 为空盒子数，则X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4!}{4^4}$	$\frac{C_4^1C_3^1P_4^2}{4^4}$	$\frac{C_4^2(C_4^2+C_2^1C_4^3)}{4^4}$	$\frac{C_4^1}{4^4}$

$$E(X)=\frac{81}{64}$$

11.数学期望的应用举例

分赌本问题:

甲乙两赌徒赌技相同，各出赌注50元.无平局，谁先赢3局，则获全部赌注.当甲赢2局、乙赢1局时，中止了赌博. 问如何分赌本?

1. 按已赌局数分:

则甲分总赌本的$2/3$、乙分总赌本的$1/3$

11.数学期望的应用举例

2. 按已赌局数和再赌下去的“期望”分:

因为再赌两局必分胜负，共四种情况：甲甲、甲乙、乙甲、乙乙所以甲分总赌本的3/4、乙分总赌本的1/4

若按已赌局数和再赌下去的“期望”分，则甲的所得X是一个可能取值为0 或100的随机变量，其分布列为：

X	0	100
P	1/4	3/4

甲的“期望”所得是：$0 \times 1/4 + 100 \times 3/4 = 75.$

11.数学期望的应用举例(续)

概率群试——验血方案的选择

为普查某种疾病, n 个人需验血. 验血方案有如下两种:

(1). 分别化验每个人的血, 共需化验n 次;

(2). 分组化验,k 个人的血混在一起化验, 若结果为阴性, 则只需化验一次; 若为阳性, 则对k 个人的血逐个化验, 找出有病者, 此时k 个人的血需化验$k+1$ 次.

设每人血液化验呈阳性的概率为p, 且每人化验结果是相互独立的.试说明选择哪一方案较经济.

11.数学期望的应用举例(续)

解:只须计算方案(2)所需次数的期望，为简单起见，不妨记n是k的倍数，共分成n/k组.设第i组需化验的次数为X_i，则

X_i	1	$k+1$
P	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

$$E(X_i) = (1-P)^k + (k+1)[1-(1-p)^k]$$
$$= (k+1) - k(1-p)^k$$

11.数学期望的应用举例(续)

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n/k}E(X_i)=\frac{n}{k}[(k+1)-k(1-p)^k]$$

$$=n\left[1-\left((1-p)^k-\frac{1}{k}\right)\right]$$

若$\left((1-p)^k-\frac{1}{k}\right)>0$,则$E(X)<n$

例如,$n=1000, p=0.001, k=10,$

$$E(X)=1000\left[1-\left(0.999^10-\frac{1}{10}\right)\right]\approx 110<<1000.$$

当$(1-p)^k<1/k$时, 选择方案(2) 较经济.

11.数学期望的应用举例(续)

市场上对某种产品每年需求量为X 吨，$X \sim U[2000, 4000]$，每出售一吨可赚3万元,售不出去，则每吨需仓库保管费1 万元，问应该生产这中商品多少吨，才能使平均利润最大?

解:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2000}, & 2000 < x < 4000 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

设每年生产y 吨的利润为Y,显然，$2000 < y < 4000$

$$Y = g(X) = \begin{cases} 3y, & y \leq X \\ 3X - (y - X), & y > X \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3y, & y \leq x \\ 4x - y, & y > x \end{cases}$$

11.数学期望的应用举例(续)

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx$$

$$=\int_{2000}^{y}(4x-y)\frac{1}{2000}dx+\int_{y}^{4000}4y\frac{1}{2000}dx$$

$$=\frac{1}{2000}(-2y^2+14000y-8\times10^6)$$

$$\frac{dE(Y)}{dy}=\frac{1}{2000}(-4y+14000)=0$$

显然，$\frac{d^2E(Y)}{dy^2}=-\frac{4}{2000}<0$

故$y=3500$时，$E(Y)$最大，$E(Y)=8250$万元

1.方差定义

若$E(X-E(X))^2$存在，则称$E(X-E(X))^2$为X 的方差，记为

$$Var(X)=D(X)=E(X-E(X))^2$$

称$\sigma_X=\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$为X 的标准差.

标准差的量纲与随机变量的量纲相同。

概率意义:

数学期望反映了X 取值的中心.

方差反映了X 取值相对于其取值中心的离散程度.

2.切比雪夫不等式

设随机变量X的方差存在(这时均值也存在), 则对任意正数ε, 有下面不等式成立

$$P\{|\ X-E(X)\ |\geq\varepsilon\}\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P\{|\ X-E(X)\ |<\varepsilon\}\geq 1-\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

3.方差的计算

命题：

$$Var(X)=0 \iff P(X=E(X))=1$$

若X 为离散型随机变量，分布列为

$$P(X=k)=p_k, \quad k=1,2.\dots.$$

$$D(X)=\sum_{k}^{+\infty}(x_k-E(X))^2p_k$$

若X 为连续型随机变量，概率密度为$f(x)$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2f(x)dx$$

计算方差的常用公式：

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

4.例

设$X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$.

解:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) = \lambda^2 + \lambda D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda$$

4.例

设$X \sim B(n,p)$，求$D(X)$.

解：$D(X) = np(1-p)$

设X $N(\mu,\sigma^2)$，求$D(X)$

解:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{\frac{x-\mu}{\sigma}=t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \sigma^2$$

4.例

设X表示独立射击直到击中目标为止所需射击的次数，已知每次射击中靶的概率为p，求$E(X), D(X)$

解: X服从几何分布.

$$P(X=k)=pq^{k-1},\quad k=1,2,\ldots$$

$$p+q=1 \qquad 0<p<1$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

4.例

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)pq^{k-1}+\sum_{k=1}^{+\infty}kpq^{k-1}$$

$$=pq\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)q^{k-2}+\frac{1}{q}$$

$$=pq\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\right)|_{x=q}+\frac{1}{p}$$

$$=pq\frac{2}{(1-x)^3}|_{x=q}+\frac{1}{p}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$D(X)=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

5.方差的性质

5.方差的性质

- $D(aX+b)=a^2D(X)$

5.方差的性质

- $D(aX+b)=a^2D(X)$
- 若X,Y相互独立，则

$$D(X\pm Y)=D(X)\pm D(Y)$$

5.方差的性质

- $D(aX+b)=a^2D(X)$
- 若X,Y相互独立，则

$$D(X\pm Y)=D(X)\pm D(Y)$$

- $X_1,\ldots,X_n$相互独立,$a_1,a_2,\ldots,a_n,b$为常数

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2D(X_i)$$

5.方差的性质

5.方差的性质

- 若X,Y 相互独立$\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$
  $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} D(X\pm Y)=D(X)\pm D(Y)$

5.方差的性质

- 若X, Y 相互独立$\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$
  $$\overset{\Leftarrow}{\Rightarrow} D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$$
- 对任意常数$C, D(X) \le E(X - C)^2$, 当且仅当$C = E(X)$时等号成立.

6.标准化随机变量

设随机变量X的期望$E(X)$、方差$D(X)$ 都存在, 且$D(X)\neq 0$, 则称

$$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为X的标准化随机变量. 显然,

$$E(X^*)=0,\ \ D(X^*)=1$$

7.随机变量的其它数字特征

矩、变异系数、分位数、中位数

k阶原点矩：$\mu_k = E(X^k) \quad k = 1, 2, \ldots.$

- 注意: $\mu_1 = E(X)$.

k 阶中心矩：$v_k = E[X - E(X)]^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$

- 注意: $v_2 = Var(X)$

k 阶原点矩与k 阶中心矩的关系

7.随机变量的其它数字特征

变异系数

称$C_V = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$为$X$ 的变异系数.

分位数

设$0 < p < 1$，$x_p = F^{-1}(p)$,

$$F^{-1}(p) = inf\{x : F(x) \geq p\}$$

则称x_p 为此分布p–分位数，亦称x_p 为下侧p–分位数.

中位数

称$p = 0.5$时的p分位数x为中位数.

中位数与均值

- 相同点：都是反映随机变量的位置特征.
- 不同点：含义不同，中位数较均值稳定。

8.协方差与相关系数

称

$$Cov(X,Y) = E[X - E(X)][Y - E(Y)]$$

为X 与Y的协方差.

称

$$\begin{pmatrix} D(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}$$

为X,Y的协方差矩阵

8.协方差与相关系数

称

$$r_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

为X 与Y 的相关系数.

若记

$$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}},\quad Y^*=\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$$

则

$$r_{XY}=cov(X^*,Y^*)$$

9.协方差和相关系数的计算

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

若(X,Y) 为离散型，

$$cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}[x_i - E(X)][y_j - E(Y)]p_{ij}$$

若(X ,Y) 为连续型，

$$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x - E(X)][y - E(Y)]f(x,y)dxdy$$

10.例

设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$, 求$\rho_{XY}$

解

$$cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-\mu_1][y-\mu_2]f(x,y)dxdy$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}ste^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s-\rho t)^2-\frac{1}{2}t^2}dsdt$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}t(\rho t+u)e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{1}{2}t^2}dudt$$

10.例

$$= \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}}\,du \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

$$= \sigma_1\sigma_2\rho$$

$$r_{XY} = \rho$$

若$(X,Y) \sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$
则X,Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ X ,Y 不相关

11.协方差和相关系数的性质

协方差的性质

$$cov(X,Y) = cov(Y,X)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$cov(X,X) = D(X)$$

$$cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_j cov(X_i, Y_j)$$

11.协方差和相关系数的性质

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} cov(X_i, Y_j)$$

若$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立,

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

12.例

设X表示独立射击直到击中目标n次为止所需射击的次数，已知每次射击中靶的概率为p，求$E(X), D(X)$.

解:令X_i表示击中目标$i-1$次后到第i 次击中目标所需射击的次数，$i=1,2,\ldots,n$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，且$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$
由前面的例知：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=\frac{n}{p} \quad D(X)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)=\frac{n(1-p)}{p^2}$$

13.例

将编号分别为$1\sim n$的n 个球随机地放入编号分别为$1\sim n$的n只盒子中，每盒一球. 若球的号码与盒子的号码一致，则称为一个配对. 求配对个数X 的期望与方差.

解:记X_i为1，如果i号放入i号盒,否则为0. $i=1,2,\ldots,n$则

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

但$X_1,X_2,\ldots,X_n$不相互独立，

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\frac{1}{n}=1$$

$$E(X_i^2)=\frac{1}{n}\qquad i=1,2,\ldots,n$$

$$E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)}\quad i,j=1,2,\ldots,n$$

13.例(续)

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}cov(X_i,Y_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})+2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}[\frac{1}{n(n-1)}-(\frac{1}{n})^2]$$

$$=1-\frac{1}{n}+2C_n^2\frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$=1$$

14.Cauchy-Schwarz不等式

$$| cov(X,Y) |^2 \leq D(X)D(Y)$$

当$D(X)>0, D(Y)>0$ 时，当且仅当$P\{Y-E(Y)=t_0[X-E(X)]\}=1$时，等式成立。

证：不妨设$D(X)>0$，令

$$g(t)=E\{[Y-E(Y)]-t[X-E(X)]\}^2$$

$$=D(Y)-2tcov(X,Y)+t^2D(X)$$

对任何实数t,$g(t)\geq 0 \Rightarrow$

$$4cov^2(X,Y)-4D(X)D(Y)\leq 0$$

即$| cov(X,Y) |^2 \leq D(X)D(Y)$等号成立 $\Longleftrightarrow$ $g(t)=0$有两个相等的实零点

14.Cauchy-Schwarz不等式

$$g(t_0)=0\text{即}E\{[Y-E(Y)]-t_0[X-E(X)]\}^2=0$$

$$\iff D[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))]=0$$

$$\iff P[(Y-E(Y))-t_0(X-E(X))=0]=1$$

即$P[(Y-E(Y))=t_0(X-E(X))]=1$
即Y 与X有线性关系的概率等于1, 这种线性关系为

$$P\left(\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}=\pm\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)=1$$

15.相关系数的性质

$|r_{XY}| \leq 1$，$|r_{XY}| = 1 \iff Cauchy - Schwarz$不等式的等号成立

$\iff$ 即Y 与X有线性关系的概率等于1，这种线性关系为

$$P\left(Y^* = \pm X^*\right) = 1$$

$X^* = (X - EX)/\sqrt{D(X)}$, $Y^* = (Y - EY)/\sqrt{D(Y)}$.

15.相关系数的性质

$$r_{XY} = 1 \iff cov(X,Y) > 0$$

$$p\left(Y^* = X^*\right) = 1$$

$$r_{XY} = -1 \iff cov(X,Y) < 0$$

$$p\left(Y^* = -X^*\right) = 1$$

r_{XY}的大小反映了X与Y之间的线性关系

- $0 < r_{XY} < 1$, X 与Y 间正相关.
- $0 > r_{XY} > -1$, X 与Y 间负相关.
- $0 > r_{XY} = \pm 1$, X 与Y 间以概率1存在线性关系.
- $r_{XY} = 0$, X 与Y 间不相关,没有线性关系

16.例

设$\theta \sim U(0,2\pi)$,$X=\cos\theta$,$Y=\cos(\theta+\alpha)$, α是给定的常数,求r_{XY}

解:

$$f_\theta(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & 0<t<2\pi\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\cos t\frac{1}{2\pi}dt=0$$

$$E(Y)=\int_0^{2\pi}\cos(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt=0$$

16.例

$$E(XY) = \int_0 2\pi \cos(t)\cos(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \quad cov(X,Y) = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$E(X^2) = \int_0 2\pi \cos^2 t \frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}, D(X) = \frac{1}{2}$$

$$E(Y^2) = \int_0 2\pi \cos^2(t+\alpha)\frac{1}{2\pi}dt = \frac{1}{2}, D(Y) = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad r_{XY} = \cos\alpha$$

16.例

若$\alpha = 0, r_{XY} = 1 \Rightarrow Y = X$

若$\alpha = \pi, r_{XY} = -1 \Rightarrow Y = -X$

从而有

$$| r_{XY} | = 1 \Rightarrow$$

X, Y有线性关系

若$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, r_{XY} = 0$ X, Y不相关，但X, Y不独立，

X, Y没有线性关系，但有函数关系

$$X^2 + Y^2 = 1$$

17.独立与相关

$$
\begin{aligned}
r_{XY}=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad X,Y \text{ 不相关} \\
&\Longleftrightarrow \quad cov(X,Y)=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad E(XY)=E(X)E(Y) \\
&\Longleftrightarrow \quad D(X\pm Y)=D(X)\pm D(Y)
\end{aligned}
$$

X,Y 相互独立 $\overset{\Leftarrow}{\Rightarrow}$ X,Y 不相关

若(X,Y)服从二维正态分布,

X,Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$ X,Y 不相关

1.定义1

随机变量Y关于给定事件A的条件数学期望：

$$E[Y|A] = E_y y P(Y = y \mid A)$$

2.例

掷均匀硬币4次，Y表示出正面的次数，$A = \{Y \leq 2\}$.

解：

$$p\{Y = y\} = \binom{4}{y} 2^{-4} = \binom{4}{y}/16 \quad (0 \leq y \leq 4)$$

$$\Rightarrow P\{Y \leq 2\} = (1 + 4 + 6)/16 = 11/16$$

$$\Rightarrow P\{Y = y \mid Y \leq 2\} = \binom{4}{y}/11 \quad (0 \leq y \leq 2)$$

$$E(Y \mid Y \leq 2) = \sum_{y=0}^{2} y \binom{4}{y}/11 = 16/11$$

3.性质

(i) $E[X+Y \mid A] = E[X \mid A] + E[Y \mid A]$

(ii) $A_1, A_2, \ldots$是样本空间的一个分割，则

$$EY = \sum_k E[X \mid A_k] P(A_k)$$

证明：

$$E(Y) = \sum_y yP\{Y=y\}$$

$$= \sum_y \left(\sum_k P\{Y=y \mid A_k\} P\{A_k\} \right)$$

$$= \sum_k \left(\sum_y yP\{Y=y \mid A_k\} \right) P\{A_k\} = \sum_k E(Y \mid A_k) P\{A_k\}$$

4.定义2

随机变量Y关于给定事件$X=x$的条件数学期望

(i) (X,Y)是离散型随机变量

$$E[Y \mid X=x]=\sum_{y} yP(Y=y \mid X=x)$$

(ii) (X,Y)是连续型随机变量

$$E[Y \mid X=x]=\int y f_{y|x}(y \mid x) dy$$

5.定义3

随机变量Y关于给定随机变量X的条件数学期望

$$E[Y \mid X] = g(X)$$

其中$g(x) = E[Y \mid X = x]$
全期望公式:

$$EY = E\{E[Y \mid X]\}$$

$$EX = E\{E[X \mid Y]\}$$

6.证明(1)

仅考虑离散型的情形，连续型的情形可类似证明

$$
\begin{aligned}
E[E(Y \mid X)] &= E[g(X)] \\
&= \sum_x g(x) P\{X = x\} \\
&= \sum_x E(Y \mid X = x) P\{X = x\} \\
&= \sum_x \left[\sum_y y P\{Y = y \mid X = x\}\right] P\{X = x\} \\
&= \sum_x \sum_y y P\{Y = y, X = x\} \\
&= \sum_y y \sum_x P\{Y = y, X = x\} \\
&= \sum_y y P\{Y = y\} = E(Y)
\end{aligned}
$$

6.证明(2)

$$
\begin{aligned}
E[E[X \mid Y]] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y = y] f_Y(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x, y) dx f_Y(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} f_Y(y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\
&= E[X].
\end{aligned}
$$

7.随机变量分布的变换

- 概率母函数（Probability Generating Function ）
- 矩母函数（Moment Generating Function ）
- 特征函数（Characteristic Function）

作用：

△ 可将卷积运算化成乘法运算；

△ 可将求各阶矩的积分运算化成微分运算；

△ 可将求随机变量序列的极限分布化成一般的函数极限问题；

8.概率母函数

(Probability Generating Function)

定义：设X是只取正整数值的离散型随机变量，其分布列为：$p_k = P(\xi = k)$，定义：

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} = E(s^X) \quad 0 \leq s \leq 1$$

称$G_X(s)$为X的概率母函数

9.概率母函数与分布列一一对应

（1） 分布列唯一决定概率母函数

（2） 概率母函数唯一决定分布列

$$G_X(s) = G_Y(s) \quad for \quad all \quad s$$

$$P(X = k) = P(Y = k) \quad for \quad k = 0, 1, \ldots$$

10.一些重要分布的概率母函数

Poisson分布$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$,$k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\phi(s) = E(s^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\lambda)^k e^{-\lambda-\lambda s+\lambda s}}{k!}$$

$$= e^{\lambda s-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}$$

$$= e^{\lambda(s-1)}$$

10.一些重要分布的概率母函数

几何分布

$$p_k = p(1-p)^k, \qquad k = 0, \ldots$$

$$\phi(s) = E(s^\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k (1-p)^k p$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p[s(1-p)]^k$$

$$= \frac{p}{1-s(1-p)}$$

11.概率母函数与随机变量的矩

$$G_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-r+1)]$$

$$G'_X(1) = E(X) \quad Var(X) = G_X^{(2)}(1) - [G_X^{(1)}(1)]^2 + G_X^{(1)}(1)$$

证明:

$$\begin{aligned} G_X^r(s) &= \frac{d^r}{ds^r}[G_X(s)] \\ &= \frac{d^r}{ds^r}\left[\sum_k p_k s^k\right] \\ &= \sum_k p_k k(k-1)\dots(k-r+1)s^{k-r} \end{aligned}$$

12.命题

设X,Y是相互独立的随机变量，则

$$G_{X+Y}(s)=G_X(s)G_Y(s)$$

证明:

$$G_Z(s)=E(s^Z)=E(S^{X+Y})$$
$$=E(s^X)E(s^Y)\quad (independence)$$
$$=G_X(s)G_Y(s)$$

系：

$$G_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(s)=G_{X_1}(s)\ldots G_{X_n}(s)$$

其中$X_1,\ldots,X_n$是相互独立的随机变量

13.随机变量的随机和

设$N, X_1, \ldots, X_n \ldots$是相互独立的只取非负整数值的随机变量序列，且$X_1, \ldots, X_n$有相同的分布，令：

$$S_N = X_1 + \cdots + X_N$$

则：$G_{S_N} = G_N(G_X(s))$

$E(S_N) = E(N)E(X)$ $Var(S_N) = E(N)Var(X) + Var(N)[E(X)]^2$

14.证明

证明：

$$G_{S_N}(s) = E(s^{S_N})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_N} \mid N = n) P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{S_n} P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} G_{X_1+\cdots+X_n}(s) P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [G_X(s)]^n P(N = n)$$

$$= G_N(G_X(s))$$

14.证明

$$E(S_N)=E(N)E(X)$$

$$\frac{d}{ds}[G_{S_N}(s)]=\frac{d}{ds}[G_N(G_X(s))]$$

$$=\frac{dG_N(u)}{du}\frac{du}{ds}\quad whereu=G_X(s)$$

$$E(S_N)=[G_N^{(1)}(1)][G_X^{(1)}(1)]=E(N)E(X)$$

$$u=G_X(1)=1$$

15.例

（Possion鸡）一个母鸡产N个鸡蛋，N是参数为λ的Poisson分布，每个鸡蛋以概率为p可孵化出一个小鸡，且不同鸡蛋孵出小鸡是相互独立的。求孵化出小鸡数的分布

令:$Z = X_1 + \cdots + X_N$ 则

$$G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}, G_X(s) = q + ps$$

$$G_Z(z) = G_N(G_X(s)) = E^{\lambda p(s-1)}$$

所以$Z \sim Poisson(\lambda)$

16.Poisson分布的再生性.

$X_i \sim Poisson(\lambda_i)$相互独立，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poisson(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

$$G_{X_i}(s) = e^{\lambda_i(s-1)}$$

$$G_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(s-1)}$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)(s-1)}$$

17.矩母函数.

（Moment Generating Functions）

定义:

$$M_X(\theta) = \mathrm{E}(e^{\theta X}) = \begin{cases} \sum\limits_x e^{\theta x}\mathrm{P}(X = x) & \text{X是离散型r. v} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f_X(x)dx & \text{X是连续型r. v} \end{cases}$$

矩母函数与分布间的一一对应

唯一性定理：如果，$M_X(\theta) = M_Y(\theta) < \infty$在$\theta$的某个区间上成立，则随机变量$X$与$Y$同分布。

18.矩母函数与随机变量X的各阶矩

X的矩母函数可以变形为：

$$M_X(\theta) = E(e^{\theta X})$$

$$= E\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\theta X)^r}{r!}\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\theta^r}{r!} E(X^r)$$

于是：$M_X(\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu'_r \frac{\theta^r}{r!}$ $\mu'_r = E(X^r)$

18.矩母函数与随机变量X的各阶矩

另一方面：

$$\frac{d^r}{d\theta^r}\{M_X(\theta)\} = \frac{d^r}{d\theta^r}\{E(e^{\theta X})\}$$

$$= E\left\{\frac{d^r}{d\theta^r}(e^{\theta X})\right\}$$

$$= E(X^r e^{\theta X})$$

于是： $\left[\frac{d^r}{d\theta^r}\{M_X(\theta)\}\right]_{\theta=0} = E(X^r) = \mu_r'$

19.性质1

性质1：$M_{a+bX}(\theta)=E(e^{\theta(a+bX)})=e^{a\theta}M_X(b\theta)$
例：$Z\sim N(0,1)$

$$M_Z(\theta)=E(e^{\theta Z})$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$=exp(\frac{1}{2}\theta^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\{-\frac{1}{2}(z-\theta)^2\}dz$$

从而：$M_Z(\theta)=exp(\frac{1}{2}\theta^2)$

19.性质1

再考虑：$X = \mu + \sigma Z$,$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$M_X(\theta) = M_{\mu+\sigma Z}(\theta)$$

$$= e^{\mu\theta} M_Z(\sigma\theta)$$

$$= exp(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

于是：

$$M_{X-\mu}(\theta) = e^{-\mu\theta} M_X(\theta) = exp(\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2r}}{2^r r!}\theta^{2r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2r}}{2^r} \frac{(2r)!}{r!} \frac{\theta^{2r}}{(2r)!}$$

19.性质1

而

$$\mu_r = \left[\frac{d^r}{d\theta^r}\{M_{X-\mu}(\theta)\}\right]_{\theta=0}$$

从而

$$\mu_{2r+1} = 0, r = 1, 2, \ldots$$

$$\mu_{2r} = \frac{\sigma^{2r}(2r)!}{2^r r!}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

特别

$$\mu_2 = \sigma^2, \mu_4 = 3\sigma^4$$

20.性质2

设X, Y是相互独立的随机变量，则

$$M_{X+Y}(\theta) = M_X(\theta)M_Y(\theta)$$

证明：

$$\begin{aligned}
M_{X+Y}(\theta) &= E\left(e^{\theta(X+Y)}\right) \\
&= E\left(e^{\theta X}e^{\theta Y}\right) \\
&= E(e^{\theta X})E(e^{\theta Y}) \\
&= M_X(\theta)M_Y(\theta)
\end{aligned}$$

系：设$X_1, \ldots, X_n$是独立随机变量，则：

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(\theta) = M_{X_1}(\theta)M_{X_2}(\theta)\ldots M_{X_n}(\theta)$$

21.例

设$Z_1,\ldots,Z_n$是相互独立的标准正态分布随机变量，则：

$$V=Z_1^2+\cdots+z_n^2\sim\chi_n^2$$

证明：设z是标准正分布的随机变量

$$M_{Z^2}(\theta)=E(e^{\theta Z^2})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta z^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\{-\frac{1}{2}(1-2\theta)z^2\}dz$$

当$\theta<1/2$时，作变换$y=\sqrt{1-2\theta}z$

$$M_{Z^2}(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}\frac{1}{\sqrt{(1-2\theta)}}dy=(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}},\quad\theta<1/2$$

21.例(证明)

于是:

$$M_V(\theta) = (1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}\dots(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}, \quad \theta < \frac{1}{2}$$

另一方面，χ_n^2的密度函数为

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} w^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}w}, \quad w \geq 0$$

21.例(证明)

其矩母函数为:

$$\int_0^{\infty} e^{\theta w}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}w}dw$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}w^{\frac{n}{2}-1}exp\{-\frac{1}{2}w(1-2\theta)\}$$

$$=(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{\infty}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-t}dt$$

$$=(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}$$

$$=M_V(\theta)$$

22.多元矩母函数

定义：

$$M_{X,Y}(\theta_1,\theta_2)=E(e^{\theta_1 X+\theta_2 Y})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta_1 x+\theta_2 y}f(x,y)dxdy$$

性质1:

$$\left[\frac{\partial^{r+s}M_{X,Y}(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1^r\partial\theta_2^s}\right]_{\theta_1=\theta_2=0}=E(X^rY^s)$$

性质2:

$$M_{aX+bY}(\theta)=E\left(e^{(aX+bY)\theta}\right)=E\left(e^{(a\theta)X+(b\theta)Y}\right)=M_{X+Y}(a\theta,b\theta)$$

23.例

$$(U,V) \sim N(0,0;1,1;\rho)$$

$$M_{U,V}(\theta_1,\theta_2) = E(e^{\theta_1 U+\theta_2 V})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta_1 u+\theta_2 v}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2-2\rho uv+v^2]\right\}dudv$$

$$= exp\{\frac{1}{2}(\theta_1^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2^2)\}$$

令：$X=\mu_x+\sigma_x U, Y=\mu_y+\sigma_y V$

则：$(U,V) \sim N(0,0;1,1;\rho) \iff (X,Y) \sim N(\mu_x,\mu_y;\sigma_x^2,\sigma_y^2;\rho)$

23.例

从而

$$M_{X,Y}(\theta_1,\theta_2)=E\left[e^{\theta_1(\mu_x+\sigma_x U)+\theta_2(\mu_y+\sigma_y V)}\right]$$

$$=e^{(\theta_1\mu_x+\theta_2\mu_y)}M_{U,V}(\theta_1\sigma_x,\theta_2\sigma_y)$$

$$=exp\{(\theta_1\mu_x+\theta_2\mu_y)+\frac{1}{2}(\theta_1^2\sigma_x^2+2\theta_1\theta_2\rho\sigma_x\sigma_y+\theta_2^2\sigma_y^2)\}$$

于是：

$$M_{aX+bY}(\theta)=M_{X,Y}(a\theta,b\theta)$$

$$=exp\{(a\mu_x+b\mu_y)\theta+\frac{1}{2}(a^2\sigma_x^2+2abcov(X,Y)+b^2\sigma_y^2)\theta^2\}$$

23.例

$$= MGF \ \ of \ \ N(a\mu_x + b\mu_y, (a^2\sigma_x^2 + 2abcov(X,Y) + b^2\sigma_y^2)\theta^2)$$

即：$aX + bY \sim$
$N(aE(X) + bE(Y), a^2Var(X) + 2abCov(X,Y) + b^2Var(Y))$
更一般地，设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从多元正态分布,则：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i), \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i<j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)\right)$$

24.特征函数

定义:设X 是一随机变量，称

$$\varphi(t)=E\{exp(itX)\}$$

为X的特征函数. $i=\sqrt{-1}$是虚数单位.
(1)当X为离散随机变量时,

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{itx_k}p_k$$

(2)当X为连续随机变量时,

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)dx$$

25.特征函数的计算中用到复变函数,

(1) 欧拉公式: $e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$

(2) 复数的共轭: $a \overline{+} bi = a - bi$

(3) 复数的模: $| a + bi | = \sqrt{a^2 + b^2}$

26.特征函数的性质

$$|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$$

$$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$$

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$$

若X 与Y独立，则

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

$$\varphi^k(0) = i^k E(X^k)$$

27.多元特征函数与多元正态分布

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_p) \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

其密度函数为

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} | \Sigma |^{1/2}} exp\left\{ -\frac{1}{2}(X-\mu)\Sigma^{-1}(X-\mu) \right\}$$

28.多元特征函数

特征函数：

$$f(t) = Eexp\{i(t_1X_1 + \cdots + t_pX_p)\}$$

$$= exp\{i\mu' t - \frac{1}{2}t'\Sigma t\}$$

数学期望与协方差矩阵

29.线性变换

定理1: $X : N_p(\mu, \Sigma) \Rightarrow$

$$a'X = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_pX_p : N(a'\mu, a'\Sigma a)$$

$a'X : N(a'\mu, a'\Sigma a)$对每个$a \Rightarrow$

$$X \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

29.线性变换(续)

（ii）

$$\mathbf{X} : N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1p}X_p \\ a_{21}X_1 + \cdots + a_{2p}X_p \\ \vdots \\ a_{q1}X_1 + \cdots + a_{qp}X_p \end{bmatrix} : N_q(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}')$$

$$\mathbf{X} + \mathbf{d} : N_p(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{d}, \boldsymbol{\Sigma})$$

30.例

$$\mathbf{X} : N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$$\begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \mathbf{AX}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}A' = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} & \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AX} : N_2(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}A')$$

31.系

$$\mathbf{X} : N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \underset{(q\times 1)}{\mathbf{X}_1} \\ --- \\ \underset{((p-q)\times 1)}{\mathbf{X}_2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ --- \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & | & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ -- & + & -- \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & | & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_1 : N_q(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$$

证明:在定理1(ii) 中令 $\underset{(q\times p)}{\mathbf{A}} = \left[\underset{(q\times q)}{\mathbf{I}} \quad | \quad \underset{(q\times(p-q))}{\mathbf{0}} \right]$即可。

32.例

$$\mathbf{X} : N_5(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_{11} = \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_1 : N_2\left(\begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} \end{bmatrix}\right)$$

33.条件分布与独立性(1)

(a) $\underset{(q_1\times 1)}{\mathbf{X}_1}$, $\underset{(q_2\times 1)}{\mathbf{X}_2}$ 相互独立, 则 $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)=\underset{(q_1\times q_2)}{\mathbf{0}}$

$$\text{(b)}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ ---\\ \mathbf{X}_2\end{bmatrix}: N_{q_1+q_2}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ ---\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & | & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ --- & + & ---\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & | & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{bmatrix}\right)$$

$\Rightarrow \mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2$相互独立的充分必要条件 $\boldsymbol{\Sigma}_{12}=0$

(c) $\mathbf{X}_1: N_{q1}(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\Sigma}_{11}),\mathbf{X}_2: N_{q2}(\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Sigma}_{22})$ 独立

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ ---\\ \mathbf{X}_2\end{bmatrix}: N_{q_1+q_2}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ ---\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & | & \mathbf{0}\\ --- & + & ---\\ \mathbf{0}' & | & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{bmatrix}\right)$$

33.条件分布与独立性(2)

(d)

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ ---\\ \mathbf{X}_2\end{bmatrix} : N_p(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}),\quad \boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ ---\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & | & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ --- & + & ---\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & | & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{bmatrix},\quad |\boldsymbol{\Sigma}_{22}|>0\Rightarrow$$

$\mathbf{X}_1$ 在给定 $\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2$ 下的条件分布是

均值为 $\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)$ 协方差矩阵为

$\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$ 的多元正态分布

33.证明(1)

证明： (d)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & | & -\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\\ --- & + & ----\\ 0 & | & \mathbf{I}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)\\ ---------------\\ \mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix};$$

其协方差矩阵为：

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}A'=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} & | & \mathbf{0}'\\ --------- & + & --\\ \mathbf{0} & | & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{bmatrix}$$

33.证明(2)

$\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)$ 和 $\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2$ 相互独立

所以，条件密度等于无条件密度

$$f(\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)=\mathbf{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)\mid \mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2)=$$

$$f(\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)=\mathbf{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2))$$

$$\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2): N_q(0,\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})$$

$$\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2): N_q(0,\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})$$

$\mathbf{X}_1$ 在给定 $\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2$ 的条件密度为：

$$N_q(\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2),\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})$$

34.例

$$\mathbf{X} : N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

X_1, X_2不独立

$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$和$X_3$相互独立

1.内容小结(第三章)

1.内容小结(第三章)

- 分布函数的定义与基本性质

1.内容小结(第三章)

- 分布函数的定义与基本性质
- 一些重要的离散型分布与连续型分布（二项分布、Poisson分布、几何分布、超几何分布、均匀分布、正态分布、指数分布、Gamma分布）

1.内容小结(第三章)

- 分布函数的定义与基本性质
- 一些重要的离散型分布与连续型分布（二项分布、Poisson分布、几何分布、超几何分布、均匀分布、正态分布、指数分布、Gamma分布）
- 联合分布的定义与基本性质（边际分布、条件分布）

1.内容小结(第三章)

- 分布函数的定义与基本性质
- 一些重要的离散型分布与连续型分布（二项分布、Poisson分布、几何分布、超几何分布、均匀分布、正态分布、指数分布、Gamma分布）
- 联合分布的定义与基本性质（边际分布、条件分布）
- 一些重要的离散型与连续型联合分布（多项分布、均匀分布、多元正态分布）

1.内容小结(第三章)

- 分布函数的定义与基本性质
- 一些重要的离散型分布与连续型分布（二项分布、Poisson分布、几何分布、超几何分布、均匀分布、正态分布、指数分布、Gamma分布）
- 联合分布的定义与基本性质（边际分布、条件分布）
- 一些重要的离散型与连续型联合分布（多项分布、均匀分布、多元正态分布）
- 随机变量的独立性

2.随机变量与随机向量的变换

- 基本思想
- 三类问题
- 基本公式与积分的计算

3.内容小结(第四章)

随机变量的数字特征：

- 定义、概率意义、性质、计算。
- 数学期望、方差、中心矩与原点矩、协方差、相关系数
- 一些重要分布的数字特征
- 多元正态分布

分布的变换——矩母函数与特征函数

- 定义、基本性质（4个）
- 一些重要分布的特征函数（退化分布、正态分布、二项分布、Poisson分布、Γ分布）
- 唯一性定理
- 应用

4.常用分布表

分布名称	参数	概率密度	期望	方差	特征函数
退化分布	c	$\binom{c}{1}$	c	0	e^{ict}
二点分布	p $(0<p<1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$	p	pq	$q+pe^{it}$
二项分布 $B(n,p)$	$n\geq 1$ $0<p<1$	$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ $k=0,\cdots,n$	np	npq	$(q+pe^{it})^n$
几何分布	p $(0<p<1)$	$q^{k-1}p, k=1,2,\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$
巴斯卡分布	r,p $r\in\mathbb{N}$ $0<p<1$	$\binom{k-1}{r-1}p^rq^{k-r}$, $k=r,r+1,\cdots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}})^r$
波松分布$P(\lambda)$	$\lambda(\lambda>0)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,\cdots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
超几何分布	$M,N,n\in\mathbb{N}$	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N}\frac{(N-M)}{N}\frac{N-n}{N-1}$	
均匀分布 $U(a,b)$	$a,b(a<b)$	$\frac{1}{b-a}I_{a<x<b}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
正态分布 $N(a,\sigma^2)$	a,σ^2	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2	$e^{iat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
指数分布	$\lambda(\lambda>0)$	$\lambda e^{-\lambda x}I_{x>0}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$
χ^2分布	$n(n\geq 1)$	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2}$ $x>0$	n	$2n$	$(1-2it)^{-n/2}$

5.习题讲解

第三章P163 习题2:

2、**解**：$P\{\xi=1\}=P\{失成\}+P\{成失\}=pq+qp$，

$$P\{\xi=2\}=P\{失失成\}+P\{成成失\}=ppq+qqp=p^2q+q^2p,\cdots$$

所以ξ的概率分布为 $p\{=k\}=p^kq+q^2p,\ k=1,2,\cdots$。

P165习题14:

14、**解**：设 $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)+h(x,y)$ 是密度函数，则由 $f(x,y)\ge 0$ 得 $h(x,y)\ge -f_1(x)f2(y)$。又

$$1=\iint f(x,y)dxdy=\int f_1(x)dx\int f_2(y)dy+\iint h(x,y)dxdy=1+\iint h(x,y)dxdy,$$

所以应有 $\iint h(x,y)dxdy=0$。

反之，若 $h(x,y)\ge -f_1(x)f2(y)$，$h(x,y)$ 可积且 $\iint h(x,y)dxdy=0$，显然有 $f(x,y)\ge 0$ 且 $\iint f(x,y)dxdy=1$，即 $f(x,y)$ 是密度函数。

所以为使 $f(x,y)$ 是密度函数，$h(x,y)$ 必须而且只需满足 $h(x,y)\ge -f_1(x)f2(y)$ 且 $\iint h(x,y)dxdy=0$。

6.习题讲解

P164 习题11：

11、证：（1） $f_\sigma(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}exp\left\{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m_0)^2+\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right\}=exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}-ln\,\sigma-ln\sqrt{2\pi}\right\}$$

若令 $Q(\sigma)=\dfrac{-1}{(2^2)}$， $T(x)=(x-m_0)^2$， $D(\sigma\_=-\ln\sigma$， $S(x)=-\ln\sqrt{2\pi}$， 则有

$$f_\sigma(x)=\exp\{Q(\sigma)T(x)+D(\sigma)+S(x)\}$$

这就证明了正态分布 $M(m_0,\sigma^2)$ 是单参数 $\sigma(\sigma>0)$ 的指数族。

（2） $f_m(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}\exp\left\{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma_0{}^2}\right\}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}\exp\left\{-\frac{x^2-2mx+m^2}{2\sigma^2}\right\}=\exp\left\{\frac{mx}{\sigma_0{}^2}-\frac{m^2}{2\sigma_0{}^2}-\frac{x^2}{2\sigma_0{}^2}+\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}\right\}$$

若令 $Q(m)=\dfrac{m}{\sigma_0{}^2}$， $T(x)=x,\ D(m)=\dfrac{-\frac{1}{2}m^2}{\sigma_0{}^2}$， $S(x)\equiv\dfrac{x^2}{2\sigma_0{}^2}+\ln\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}$， 则

$$f_m(x)=\exp\{Q(m)T(x)+D(m)+S(x)\}$$

所以正态分布 $N(m,\sigma_0{}^2)$ 是单参数 $m(-\infty<m<\infty)$ 的指数族。

7.习题讲解

P164 习题11:

（3） $p(k;\lambda)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\exp\{k\ln\lambda-\lambda-\ln k!\}$。

若令 $Q(\lambda)=\ln\lambda, T(k)=k$, $D(\lambda)=-\lambda$, $S(k)=-\ln k!$，则 $p(k;\lambda)=\exp\{Q(\lambda)T(k)+D(\lambda)+S(k)\}$，所以 $p(k;\lambda)$ 是单参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数族。

（4）关于 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，其密度函数为 $f_\theta(x)=\begin{cases}1/\theta, & 0\le x\le\theta\\ 0, & x>\theta \text{ 或 } x>0\end{cases}$

$f_\theta(x)$ 是定义在 $-\infty<x<\infty$ 的函数，由于它是 x 的分段表示的函数，所以无法写成形式 $f_\theta(x)=\exp\{Q(\theta)T(x)+D(\theta)+S(x)\}$，故 $f_\theta(x)$ 关于 θ 不是一个单参数的指数族。

8.习题讲解

P166 习题28:

（1）为求(ζ,ξ)的联合概率分布，分别考虑下列三种情况：$(i,k\geq 1)$其中利用到独立性。

（a） $i=k$

$$P\{\zeta=k,\xi=k\}=P\left\{\bigcup_{j=1}^{k}(\xi=k,\eta=j)\right\}=\sum_{j=1}^{k}P\{\xi=k,\eta=j\}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}p^2q^{k+j=2}=p^2q^{k-1}\cdot\frac{1-q^k}{1-q}=pq^{k-1}(1-q^k)\text{；}$$

(b) $i<k$

$$P\{\zeta=k,\xi=i\}=P\{\xi=i,\eta=k\}=p^2q^{1+k-2}\text{；}$$

(c) $i>k$

$$\{\zeta=k,\xi=i\}=\phi,\ \ P\{\zeta=k,\xi=i\}=0$$

(2) 因为$=\max(\xi,\eta)$，所以

$$\{\zeta=k\}=\bigcup_{i=1}^{k-1}\{\xi=i,\eta=k\}\cup\bigcup_{j=1}^{k}\{\xi=k,\eta=j\}$$

$$P\{\zeta=k\}=\sum_{i=1}^{k-1}P\{\xi=i,\eta=k\}+\sum_{j=1}^{k}P\{\xi=k,\eta=j\}=\sum_{i=1}^{k-1}p^2q^{1+k-2}+\sum_{j=1}^{k}p^2q^{k+j-2}$$

$$=p^2q^{k-1}\left[\frac{1-q^{k-1}}{1-q}+\frac{1-q^k}{1-q}\right]=(2-q^{k-1}-q^k)pq^{k-1}\qquad(k=1,2,\cdots)$$

9.习题讲解

P166 习题28:

(3) $P\{\xi=i\mid\zeta=k\}=\dfrac{P\{\xi=i,\zeta=k\}}{P\{\zeta-k\}}$

$$=\begin{cases}\dfrac{pq^{k-1}(1-q^k)}{pq^{k-1}(2-q^{k-1}q^k)}=\dfrac{1-q^k}{2-q\kappa-1}q^k, & i=k\\[2ex] \dfrac{p^2q^{1+k-2}}{pq^{k-1}(2-q^{k-1}q^k)}=\dfrac{pq^{i-1}}{2-q\kappa-1}q^k, & i<k\end{cases} \qquad i>k,(i,k\geq 1)$$

10.习题讲解

P167 习题29：

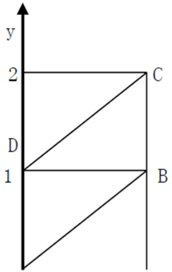
29、解： ξ 与 η 的密度函数为

$$p_\xi(x)=p_\eta(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases} \qquad (1)$$

由卷积公式及独立性得 $\zeta=\xi+\eta$ 的分布密度函数为

$$p_\zeta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x)p_\eta(y-x)dx \qquad (2)$$

把（2）与（1）比较知，在（2）中应有 $0\le x\le 1$，$0\le y-x\le 1$，满足此不等式组的解 (x,y) 构成图中平面区域平形四边形 ABCD，当 $0\le y\le 1$ 时 $0\le x\le y$，当 $1\le y\le 2$ 时 $y-1\le x\le 1$。所以当 $0\le y\le 1$ 时（2）中积分为



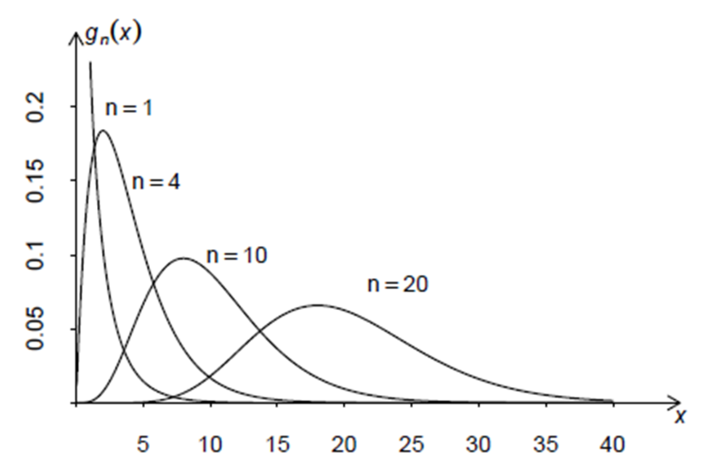
$$p_\zeta(y)=\int_0^y 1\times 1dx=y$$

当 $1\le y\le 2$ 时，（2）中积分为

$$p_\zeta(y)=\int_{y-1}^{1}1\times 1dx=2-y;$$

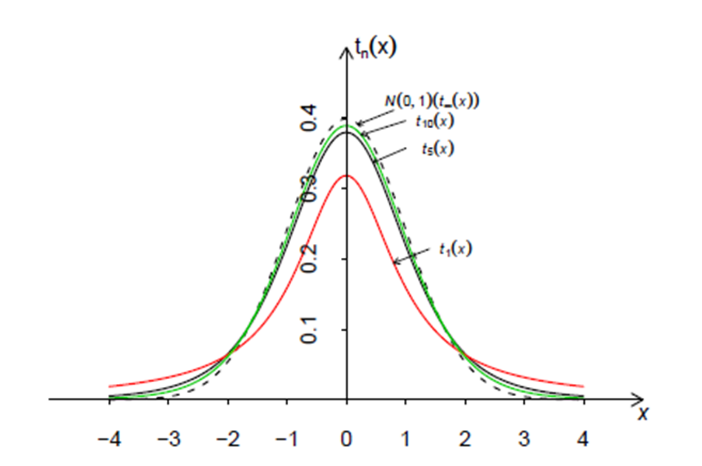
对其余的 y 有 $p_\zeta(y)=0$。

11.卡方分布的密度函数



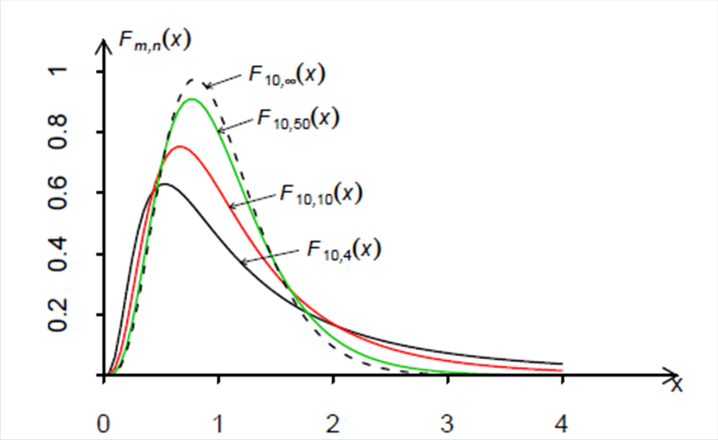
卡方分布的密度函数

12.t-分布的密度函数



t-分布的密度函数

13.F-分布的密度函数



F-分布的密度函数

14.习题讲解

P167-168 习题37：

37、证：（U，V）联合分布函数为

$$F(u,v)=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2<u\\ \frac{x}{y}<v}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$$

当$s>0$时作变换，$s=x^2+y^2$，$t=\dfrac{x}{y}$，反函数有两支

$$\begin{cases}x=t\sqrt{\dfrac{s}{(1+t^2)}}\\ y=\sqrt{\dfrac{s}{(1+t^2)}}\end{cases}\quad 与 \quad \begin{cases}x=-t\sqrt{\dfrac{s}{(1+t^2)}}\\ y=-s\sqrt{\dfrac{s}{(1+t^2)}}\end{cases}$$

$$J^{-1}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2}\end{vmatrix}=-\frac{2x^2}{y^2}-2=-2(t^2+1)，\ |J|=\frac{1}{2(1+t^2)}$$

15.习题讲解

P167-168 习题37：

考虑到反函数有两支，分别利用两组

$$F(u,v)=\left\{\iint\limits_{\substack{x^2+y^2<u\\ \frac{x}{y}<v,\ y>0}}+\iint\limits_{\substack{x^2+y^2<u\\ \frac{x}{y}<v,\ y>0}}\right\}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy=2\int_0^u\int_{-\infty}^v\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}s}\cdot\frac{1}{2(1+t^2)}dt$$

对 $F(u,v)$ 求导，得（U，V）的联合密度为（其余为 0）

$$p(u,v)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}\cdot\frac{1}{\pi(1+v^2)},\qquad u>0,\ 0<v<\infty$$

若令 $p_U(u)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}\ (u>0)$, $\quad p_V(v)=\frac{1}{\pi(1+v^2)}\qquad(-\infty<v<\infty)$，

则 U 服从指数分布，V 服从柯西分布，且 $p(u,v)=p_U(u)\times p_V(v)$，所以 U，V 两随机变量独立。

16.习题讲解

P246 习题9-10:

9、证: $\sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi \ge k\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} P\{\xi = j\}$

$$= \{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} + \cdots + P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3 + \cdots + P\{\xi = 3\} + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kP\{\xi = k\} = E\xi .$$

14、证: $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x) + \int_{0}^{\infty} xdF(x) = \int_{-\infty}^{0} xdF(x) - \int_{0}^{\infty} xd(1-F(x))$

$$= xF(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx - x(1-F(x))\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty}(1-F(x))dx$$

由均值存在得 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF(x) < \infty$,

$\therefore \quad 0 \le AF(-A) \le \int_{-\infty}^{-A} |x|\, dF(x) \to 0 \quad$ (当$A \to +\infty$),

$0 \le B(1-F(B)) \le \int_{B}^{\infty} |x|\, dF(x) \to 0 \quad$ (当$B \to +\infty$)

以此代入$E\xi$的计算式即得 $\quad E\xi = \int_{0}^{\infty}(1-F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$ 。

17.习题讲解

P246习题13-14:

设(ξ,η)的联合密度函数是 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}\left[x^2-2Rxy+y^2\right]}$，求证:

$$E\left[\max(\xi,\eta)\right]=\sqrt{\frac{1-R}{\pi}}$$

$$
\begin{aligned}
E\left[\max(\xi,\eta)\right]&=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(x,y)e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}(x^2-2Rxy+y^2)}dxdy\\
&=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}(x^2-2Rxy+y^2)}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}ydy\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}(x^2-2Rxy+y^2)}dx\right]\\
&=\frac{1}{\pi\sqrt{1-R^2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}(x^2-2Rxy+y^2)}dy\right]\\
&=\frac{1}{\pi\sqrt{1-R^2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(y-Rx)^2}{2(1-R^2)}}dy\right]
\end{aligned}
$$

18.习题讲解

P246习题13-14：

$$
=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{x\sqrt{\frac{1-R}{1+R}}x} e^{\frac{-y^2}{2}} dy\right]
$$

$$
=\frac{1}{\pi}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{1-R}{1+R}}x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-R}{1+R}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[1+\frac{1-R}{1+R}\right]x^2} dx
$$

$$
=\sqrt{\frac{1-R}{\pi}}
$$

19.习题讲解

P247 习题21：

10、解： 以ξ_i表第 i 次测量值，由于受测量过程中许多随机因素的影响，测量值ξ_i和物体真实重量a之间有偏差，ξ_i是独立同分布的随机变量，并有$E\xi_i=a, D\xi_i=\sigma^2$。测量记录的平均值记为$\eta$，则

$$\eta=\frac{1}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n)$$

$$E\eta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i=\frac{na}{n}=a, \qquad D\eta=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}。$$

平均值η的均值仍为a，但方差只有ξ_i方差的$\frac{1}{n}$，而方差是描述随机变量对于其数学期望的离散程度，所以以η作为物体的重量，则更近于真值。

1.随机变量序列的四种收敛性(1)

一、几乎处处收敛（以概率1收敛）

二、以概率收敛

定义：设$\{\xi_k\}$是随机变量序列,若存在随机变量ξ(或常数),对于任意 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n-\xi|<\varepsilon\}=1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon\}=0$$

则称随机变量序列$\{\xi_k\}$依概率收敛于ξ,记为

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n \overset{P}{=} \xi \qquad (\text{或}\ \xi_n \xrightarrow{P} \xi)$$

2.随机变量序列的四种收敛性(2)

三、以分布收敛

定义:设 $F(x), F_1(x), F_2(x), \cdots$ 是一列分布函数,如果对 $F(x)$ 的每个连续点 x,都有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于分布函数 $F(x)$,并记作

$$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x) \qquad (n \to \infty)$$

四、r阶矩收敛

3.四种收敛之间的关系(1)

(i) r阶矩收敛 ⟶ 以概率收敛

(ii) 以概率收敛 ⟶ 以分布收敛

证明:设随机变量序列$\{\xi_n\}$和随机变量ξ的分布函数分别为$\{F_n(x)\}$和$F(x)$,对任意的$x,y\in\mathrm{R}$有

$$\{\xi<y\}=\{\xi_n<x;\xi<y\}\cup\{\xi_n\ge x;\xi<y\}$$

$$\subseteq\{\xi_n<x\}\cup\{\xi_n\ge x;\xi<y\}$$

从而

$$F(y)\le F_n(x)+P\{\xi_n\ge x;\xi<y\}$$

4.四种收敛之间的关系(2)

如果 $y<x$ 由随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 依概率收敛于 ξ 知

$$P\{\xi_n \geq x; \xi < y\} \leq P\{|\xi_n - \xi| \geq x-y\} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

$$\therefore \quad F(y) \leq \varliminf_{n\to\infty} F_n(x)$$

同理,当 $x<z$ 时,有 $\varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(z)$

于是,当 $y<x<z$ 时,有

$$F(y) \leq \varliminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(z)$$

令 $y\to x, z\to x$,即得

$$F(x-0) \leq \varliminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x+0)$$

如果 x 是 $F(x)$ 的连续点,就有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

5.四种收敛之间的关系(3)

定理:随机变量序列$\{\xi_n\}$依概率收敛于常数 C 的充要条件是:$\{\xi_n\}$的分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于常数 C 的分布函数$F(x)$,即

$$X_n \xrightarrow{P} C \Leftrightarrow F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$$

证明:必要性已证,下面只证充分性

由于$\xi \equiv$C 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<C \\ 1, & x\geq C\end{cases}$$

对任意的 ε >0 有

$$P\{|\xi_n - C|\geq \varepsilon\} = P\{\xi_n \geq C+\varepsilon\} + P\{\xi_n \leq C-\varepsilon\} \leq 1-F_n(C+\varepsilon)\} + F_n(C-\varepsilon)$$

由于$\{F_n(x)\}$弱收敛于$F(x)$,并注意到$F(x)$的表达式只在 C 点不连续,从而

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - C|\geq \varepsilon\} = 0$$

即$\{\xi_n\}$依概率收敛于常数 C.

(iii) 几乎处处收敛 ⟶ 以概率收敛

1.Chebyshev大数定律

设随机变量序列$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$相互独立，且具有相同的数学期望和方差.

$$E(X_k) = \mu, \quad D(X_k) = \sigma^2 \ , k = 1, 2, \ldots$$

则$\forall \varepsilon > 0$有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\mid \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu \mid \geq \varepsilon \right) = 0$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\mid \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu \mid < \varepsilon \right) = 1$$

2.Chebyshev大数定律推广

更一般：

设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$两两不相关，不一定有相同的数学期望与方差，可设

$$E(X_k) = \mu_k, \quad D(X_k) = \sigma_k^2 \leq \sigma^2 \ , k = 1, 2, \ldots$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

3.思考题

设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$相互独立，服从同一分布，且具有相同的数学期望$E(X_k)=\mu$，$k=1,2,\ldots$,是否有对任意正数$\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-\mu\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

4.中心极限定理(I)

- 问题的研究背景
- 几个重要的中心极限定理
- 中心极限定理的应用

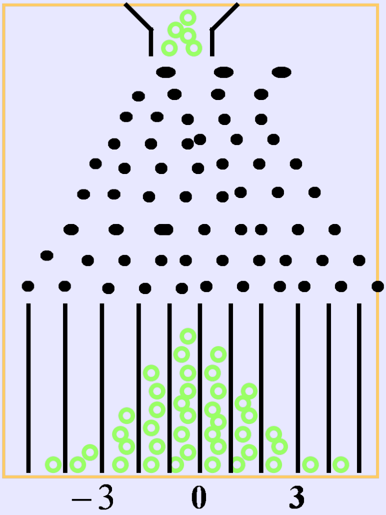
5.研究背景

(1) 概率的频率稳定性

(2) 高尔顿钉板试验

6.高尔顿钉板试验

高尔顿钉板试验



7.问题

问题：考虑如下独立随机变量和

设$\{X_n\}$为独立随机变量序列，记其和为

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

△ 讨论独立随机变量和的极限分布

△ 极限分布为正态分布.

中心极限定理就是讨论规范化后的随机变量序列的部分和何时依分布收敛于标准正态分布。

8.几个重要的中心极限定理

- 独立同分布随机变量序列的中心极限定理
  - （1）林德贝格—勒维中心极限定理
  - （2）棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理

- 独立不同分布随机变量序列的中心极限定理
  - （1）林德贝格中心极限定理
  - （2）李雅普诺夫中心极限定理

9.（1）林德贝格—勒维（Lindeberg-Lèvy）中心极限定理

设随机变量序列$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$独立同一分布，且有期望和方差：

$$E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2 > 0, k = 1, 2, \ldots$$

则对于任意实数x，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

10.（2）棣莫弗—拉普拉斯（DeMoivre-Laplace ）中心极限定理

设μ_n为服从二项分布$b(n,p)$的随机变量，则当n 充分大时，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le y\right\} = \Phi(y)$$

注：这是林德贝格—勒维中心极限定理的特例.

11.（3）林德贝格中心极限定理

设$\{X_n\}$为独立随机变量序列，若任对$\tau > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau^2 B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x-\mu_i|>\tau B_n} (x-\mu_i)^2 p_i(x) dx = 0$$

(林德贝格条件)，则

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \le y \right\} = \Phi(y)$$

12.（4）李雅普诺夫中心极限定理

设$\{X_n\}$为独立随机变量序列，若存在$\delta > 0$，满足：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E\left(| X_i - \mu_i |^{2+\delta} \right) = 0$$

则

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \leq y \right\} = \Phi(y)$$

注：李雅普诺夫中心极限定理是林德贝格中心极限定理的推论

13.例

设$X_1, X_2, \ldots, X_{99}$相互独立，且服从不同的0–1分布$P(X_i = 1) = p_i = 1 - \frac{i}{100}$,试求$P\left(\sum_{i=1}^{99} X_i \geq 60\right)$

解：设$X_{100}, X_{101}, \ldots$相互独立，且与X_{99}同分布,则可以验证$\{X_n\}$满足$\delta = 1$的李雅普诺夫条件，

且$E\left(\sum_{i=1}^{99} X_i\right) = 49.5$,$Var\left(\sum_{i=1}^{99} X_i\right) = 16.665$由此得

$$P\left(\sum_{i=1}^{99} X_i \geq 60\right) = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{99} X_i - 49.5}{\sqrt{16.665}} \geq \frac{60 - 49.5}{\sqrt{16.665}}\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi(2.5735) = 0.005$$

14.中心极限定理的应用

二项分布的近似计算：

例:设有一批种子，其中良种占1/6. 试估计在任选的6000粒种子中，良种比例与1/6 比较上下不超过1%的概率。

解: 设X 表示6000粒种子中的良种数,则

$$X \sim B(6000, 1/6)$$

由德莫佛—拉普拉斯中心极限定理,近似有

$$X \sim N(1000, \frac{5000}{6})$$

15.二项分布的近似计算(续)

$$
\begin{aligned}
P\left(\left| \frac{X}{6000} - \frac{1}{6} \right| < 0.01 \right) &= P(| X - 1000 | < 60) \\
&\approx \Phi\left(\frac{1060 - 1000}{\sqrt{5000/6}} \right) - \Phi\left(\frac{940 - 1000}{\sqrt{5000/6}} \right) \\
&= \Phi\left(\frac{60}{\sqrt{5000/6}} \right) - \Phi\left(\frac{-60}{\sqrt{5000/6}} \right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{60}{\sqrt{5000/6}} \right) - 1 \approx 0.9624
\end{aligned}
$$

16.比较几个近似计算的结果

比较几个近似计算的结果

二项分布(精确结果) $P\left(\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<0.01\right)\approx 0.9590$

中心极限定理 $P\left(\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<0.01\right)\approx 0.9624$

Poisson 分布 $P\left(\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<0.01\right)\approx 0.9379$

Chebyshev 不等式 $P\left(\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<0.01\right)\geq 0.7685$

17.注意

二项分布是离散分布，而正态分布是连续分布，所以用正态分布作为二项分布的近似时，可作如下修正：

$$P(k_1 \le \mu_n \le k_2) = P(k_1 - 0.5 < \mu_n < k_2 + 0.5)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{k_2 + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

18.棣莫弗—拉普拉斯定理的三个应用

设μ_n为服从二项分布$b(n,p)$的随机变量，则当n充分大时，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le y\right\} = \Phi(y)$$

i) 已知n 和y，求概率；

ii) 已知n 和概率，求y ；

iii) 已知y 和概率，求n .

19.给定n 和y，求概率

例:100个独立工作(工作的概率为0.9)的部件组成一个系统，求系统中至少有85个部件工作的概率.

解：用$X_i = 1$表示第i个部件正常工作，反之记为$X_i = 0$又记$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$,则$E(Y) = 90$，$Var(Y) = 9$.由此得：

$$P\{Y \geq 85\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{85 - 0.5 - 90}{\sqrt{9}}\right) = 0.966$$

20.给定n 和概率，求y

例:有200台独立工作(工作的概率为0.7)的机床，每台机床工作时需15kw电力. 问共需多少电力，才可有95%的可能性保证正常生产?

解：用$X_i = 1$表示第i台机床正常工作，反之记为$X_i = 0$又记$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}$,则$E(Y) = 140$, $Var(Y) = 42$.设供电量为y，则从

$$P\{15Y \geq y\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{y/15 + 0.5 - 140}{\sqrt{42}}\right) \geq 0.95$$

中解得

$$y \geq 2252$$

21.给定y 和概率，求n

例:用调查对象中的收看比例k/n 作为某电视节目的收视率p的估计。要有90%的把握，使k/n与p的差异不大于0.05，问至少要调查多少对象？

解：用Y_n表示n 个调查对象中收看此节目的人数，则Y_n服从$b(n,p)$分布，k为Y_n的实际取值。根据题意

$$P(|\ Y_n/n-p\ |< 0.05) \approx 2\Phi\left(0.05\sqrt{n/p(1-p)}\right)-1 \geq 0.90$$

从中解得

$$0.05\sqrt{n/p(1-p)} \geq 1.645$$

又由$p(1-p) \leq 0.25$ 可解得

$$n \geq 270.6 \quad , n = 271$$

22.实际例子

一个实际例子：（上海市餐饮发票抽奖的方案设计）

开奖的奖金额分2万，5万，10万，15万，20万，30万，50万七等，每个星期开奖一次。

开奖的方式，俄罗斯赌盘，如要求每年的总开奖金额在800万左右，问应如何设计各等奖项在俄罗斯赌盘上的分配片数？

1.内容小结

极限定理:

弱大数定律

强大数定理

中心极限定理

随机变量序列的四种收敛性

2.内容小结

- **弱大数定律：**

定义

Markov弱大数定律

辛钦弱大数定律

- **强大数定理：**

定义

Borel-Cantelli引理

Borel强大数定律

- **中心极限定理：**

3.内容小结

定义

Linderberg-Levy中心极限定理及其应用

Linderberg-Feller中心极限定理、

李雅普诺夫中心极限定理。

4.习题讲解

- P246 14
- P246 16
- P247 21
- P249 47
- P321 8

5.补充习题

- 例1：把数字$1, 2, \ldots, n$任意排成一列，如果数字k恰好出现在第k个位置则称为又一个配对，以X表示所有的配对数。求X的数学期望与方差。

- 例2：把r 个球随机地放入n个盒子中，以X_r表示空盒的数目，求X_r的数学期望。

- 例3：设随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$中任意两个随机变量的相关系数都是ρ，证明：$\rho \geq -1/(n-1)$

- 例4：设X，Y都是只取两个值的随机变量，证明X与Y相互独立的充分必要条件是X与Y不相关。

6.补充习题

- 例5：设$X_k, k = 1, 2, \ldots$相互独立，且：

$$P(X_k = \pm ks) = 1/2$$

证明当$s < 1/2$时，$\{X_k\}$服从弱大数定律。

- 例6：P322 25-27，P324 39
- 例7：P324 37(1)
- 例8：P327 61
- 例9：P325 64