概 率 论 基 础

张 新 生

Email: xszhang@fudan.edu.cn

复旦大学

October 17, 2010

统计学系

习题讲解

P57 习题4：试证$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 + \overline{A_1}A_2 + \overline{A_1 A_2} \cdots \overline{A_{n-1}} A_n$，并对$n = 4$画出文图。

习题讲解

P57 习题4：试证$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 + \overline{A_1}A_2 + \overline{A_1 A_2} \cdots \overline{A_{n-1}}A_n$，并对$n = 4$画出文图。

P58习题14：从n双不同的鞋子中任取$2r(2r < n)$只，求下列事件发生的概率：

（1）没有成对的鞋子；

（2）只有一对成对的鞋子；

（3）恰有两对鞋子；

（4）恰有r对鞋子；

习题讲解

从n对不同的鞋子中任意取出$2m$只（$2m < n$），求其中恰有k双配对的鞋子的概率。

解： 任意取出$2m$只鞋子的取法有

$$|\Omega| = \binom{2n}{2m}$$

种。

习题讲解

从n对不同的鞋子中任意取出$2m$只（$2m < n$），求其中恰有k双配对的鞋子的概率。

解： 任意取出$2m$只鞋子的取法有

$$|\Omega| = \binom{2n}{2m}$$

种。记$A = \{$恰有k双配对的鞋子$\}$，则可以分成5步实现A：

1)将鞋子配成n对，共有1种配法；

习题讲解

从n对不同的鞋子中任意取出$2m$只（$2m < n$），求其中恰有k双配对的鞋子的概率。

解： 任意取出$2m$只鞋子的取法有

$$|\Omega| = \binom{2n}{2m}$$

种。记$A = \{$恰有k双配对的鞋子$\}$，则可以分成5步实现A：

1)将鞋子配成n对，共有1种配法；

2) 任取出k对，共有$\binom{n}{k}$取法；

习题讲解

从n对不同的鞋子中任意取出$2m$只（$2m < n$），求其中恰有k双配对的鞋子的概率。

解： 任意取出$2m$只鞋子的取法有

$$|\Omega| = \binom{2n}{2m}$$

种。记$A = \{$恰有k双配对的鞋子$\}$，则可以分成5步实现A：

1)将鞋子配成n对，共有1种配法；

2) 任取出k对，共有$\binom{n}{k}$取法；

3) 在剩下的$n-k$对鞋子中取出$2m-2k$对，共有$\binom{n-m}{2m-2k}$种取法；

习题讲解

从n对不同的鞋子中任意取出$2m$只（$2m < n$），求其中恰有k双配对的鞋子的概率。

解： 任意取出$2m$只鞋子的取法有

$$|\Omega| = \binom{2n}{2m}$$

种。记$A = \{$恰有k双配对的鞋子$\}$，则可以分成5步实现A：

1)将鞋子配成n对，共有1种配法；

2) 任取出k对，共有$\binom{n}{k}$取法；

3) 在剩下的$n-k$对鞋子中取出$2m-2k$对，共有$\binom{n-m}{2m-2k}$种取法；

4) 在3)中取出的每一对鞋中各取出一只鞋，共有2^{2m-2k}取法。

习题讲解

从n对不同的鞋子中任意取出$2m$只（$2m < n$），求其中恰有k双配对的鞋子的概率。

解： 任意取出$2m$只鞋子的取法有

$$|\Omega| = \binom{2n}{2m}$$

种。记$A = \{$恰有k双配对的鞋子$\}$，则可以分成5步实现A：

1)将鞋子配成n对，共有1种配法；

2) 任取出k对，共有$\binom{n}{k}$取法；

3) 在剩下的$n-k$对鞋子中取出$2m-2k$对，共有$\binom{n-m}{2m-2k}$种取法；

4) 在3)中取出的每一对鞋中各取出一只鞋，共有2^{2m-2k}取法。

5) 将2)和4)中取出的鞋放在一起，完成任务，共有1种方法。

习题讲解

从n对不同的鞋子中任意取出$2m$只（$2m < n$），求其中恰有k双配对的鞋子的概率。

解： 任意取出$2m$只鞋子的取法有

$$|\Omega| = \binom{2n}{2m}$$

种。记$A = \{$恰有k双配对的鞋子$\}$，则可以分成5步实现A：

1)将鞋子配成n对，共有1种配法；

2) 任取出k对，共有$\binom{n}{k}$取法；

3) 在剩下的$n-k$对鞋子中取出$2m-2k$对，共有$\binom{n-m}{2m-2k}$种取法；

4) 在3)中取出的每一对鞋中各取出一只鞋，共有2^{2m-2k}取法。

5) 将2)和4)中取出的鞋放在一起，完成任务，共有1种方法。

由乘法原理

$$|A| = 1 \cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{2m-2k} \cdot 2^{2m-2k} \cdot 1$$

习题讲解

从n对不同的鞋子中任意取出$2m$只（$2m < n$），求其中恰有k双配对的鞋子的概率。

解： 任意取出$2m$只鞋子的取法有

$$|\Omega| = \binom{2n}{2m}$$

种。记$A = \{\text{恰有}k\text{双配对的鞋子}\}$，则可以分成5步实现$A$：

1)将鞋子配成n对，共有1种配法；

2) 任取出k对，共有$\binom{n}{k}$取法；

3) 在剩下的$n-k$对鞋子中取出$2m-2k$对，共有$\binom{n-m}{2m-2k}$种取法；

4) 在3)中取出的每一对鞋中各取出一只鞋，共有2^{2m-2k}取法。

5) 将2)和4)中取出的鞋放在一起，完成任务，共有1种方法。

由乘法原理

$$|A| = 1 \cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{2m-2k} \cdot 2^{2m-2k} \cdot 1$$

习题讲解

P58习题19 从一副52张扑克牌中任取5张，求下列事件的概率：
(1) 以A打头的同花顺次5张；
(2) 其它同花顺次5张；
(3) 有四张同点数；
(4) 3张同点数，另外2张也同点数；
(5) 5张同花；
(6) 异花顺次5张；
(7) 3张同点，另外两张不同点；
(8) 5张中有两对；
(9) 5张中恰有一对；
(10) 其它情形。

解：

$|\Omega| = \binom{52}{5}$。分别用A_i表示第(i)问题中的事件。

解：

$|\Omega| = \binom{52}{5}$。分别用A_i表示第(i)问题中的事件。

(1) $|A_1| = \binom{4}{1}$，$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$；

解:

$|\Omega| = \binom{52}{5}$。分别用A_i表示第(i)问题中的事件。

(1) $|A_1| = \binom{4}{1}$, $\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$;

(2) $|A_2| = \binom{4}{1}\binom{8}{1}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{52}{5}}$;

解：

$|\Omega| = \binom{52}{5}$。分别用A_i表示第(i)问题中的事件。

(1) $|A_1| = \binom{4}{1}$，$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(2) $|A_2| = \binom{4}{1}\binom{8}{1}$，$\mathbb{P}(A_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(3) $|A_3| = \binom{13}{1}\binom{48}{1}$，$\mathbb{P}(A_3) = \frac{\binom{13}{1}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(4) 从13点数选取一点数，从该点数的四花色牌种任选三张；在剩下的12个点数中选取1个点数，在新点数的四个花色中任取两张牌；将选出的牌放在一起实现A_4。由乘法原理
$|A_4| = \binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}$

解：

$|\Omega| = \binom{52}{5}$。分别用A_i表示第(i)问题中的事件。

(1) $|A_1| = \binom{4}{1}$，$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(2) $|A_2| = \binom{4}{1}\binom{8}{1}$，$\mathbb{P}(A_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(3) $|A_3| = \binom{13}{1}\binom{48}{1}$，$\mathbb{P}(A_3) = \frac{\binom{13}{1}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(4) 从13点数选取一点数，从该点数的四花色牌种任选三张；在剩下的12个点数中选取1个点数，在新点数的四个花色中任取两张牌；将选出的牌放在一起实现A_4。由乘法原理
$|A_4| = \binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}$，所以

$$\mathbb{P}(A_4) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

解:

$|\Omega| = \binom{52}{5}$。分别用A_i表示第(i)问题中的事件。

(1) $|A_1| = \binom{4}{1}$，$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(2) $|A_2| = \binom{4}{1}\binom{8}{1}$，$\mathbb{P}(A_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(3) $|A_3| = \binom{13}{1}\binom{48}{1}$，$\mathbb{P}(A_3) = \frac{\binom{13}{1}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(4) 从13点数选取一点数，从该点数的四花色牌种任选三张；在剩下的12个点数中选取1个点数，在新点数的四个花色中任取两张牌；将选出的牌放在一起实现A_4。由乘法原理
$|A_4| = \binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}$，所以

$$\mathbb{P}(A_4) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

(5) $|A_5| = \binom{4}{1}\binom{13}{5}$，（可以是四种花色中的一种，在同一种花色中，5张牌占有13个点中的5个点）$\mathbb{P}(A_5) = \frac{\binom{4}{1}\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$；

习题讲解

解:

(6) $|A_6| = \binom{9}{1}(4^5 - 4)$，（异花顺次5张牌=顺次5张牌-同花顺次5张牌）$\mathbb{P}(A_6) = \frac{\binom{9}{1}(4^5-4)}{\binom{52}{5}}$;

习题讲解

解：

(6) $|A_6| = \binom{9}{1}(4^5 - 4)$，（异花顺次5张牌=顺次5张牌-同花顺次5张牌）$\mathbb{P}(A_6) = \frac{\binom{9}{1}(4^5-4)}{\binom{52}{5}}$；

(7) $|A_7| = \binom{4}{3}\binom{13}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$，

习题讲解

解：

(6) $|A_6| = \binom{9}{1}(4^5 - 4)$，（异花顺次5张牌=顺次5张牌-同花顺次5张牌）$\mathbb{P}(A_6) = \frac{\binom{9}{1}(4^5-4)}{\binom{52}{5}}$；

(7) $|A_7| = \binom{4}{3}\binom{13}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$，（三张同点牌占13点中的一点，另两张不同点牌占12点中的2点，再考虑花色）

$\mathbb{P}(A_7) = \frac{\binom{4}{3}\binom{13}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$；

习题讲解

解:

(6) $|A_6| = \binom{9}{1}(4^5 - 4)$，（异花顺次5张牌=顺次5张牌-同花顺次5张牌）$\mathbb{P}(A_6) = \frac{\binom{9}{1}(4^5-4)}{\binom{52}{5}}$；

(7) $|A_7| = \binom{4}{3}\binom{13}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$，（三张同点牌占13点中的一点，另两张不同点牌占12点中的2点，再考虑花色）

$\mathbb{P}(A_7) = \frac{\binom{4}{3}\binom{13}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(8) $|A_8| = \binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{52-8}{1}$，

习题讲解

解：

(6) $|A_6| = \binom{9}{1}(4^5-4)$，（异花顺次5张牌=顺次5张牌-同花顺次5张牌）$\mathbb{P}(A_6) = \frac{\binom{9}{1}(4^5-4)}{\binom{52}{5}}$；

(7) $|A_7| = \binom{4}{3}\binom{13}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$，（三张同点牌占13点中的一点，另两张不同点牌占12点中的2点，再考虑花色）

$\mathbb{P}(A_7) = \frac{\binom{4}{3}\binom{13}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(8) $|A_8| = \binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{52-8}{1}$，

$\mathbb{P}(A_8) = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(9) $|A_9| = \binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3$，

$\mathbb{P}(A_9) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3}{\binom{52}{5}}$；

习题讲解

解：

(6) $|A_6| = \binom{9}{1}(4^5-4)$，（异花顺次5张牌=顺次5张牌-同花顺次5张牌）$\mathbb{P}(A_6) = \frac{\binom{9}{1}(4^5-4)}{\binom{52}{5}}$；

(7) $|A_7| = \binom{4}{3}\binom{13}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$，（三张同点牌占13点中的一点，另两张不同点牌占12点中的2点，再考虑花色）

$\mathbb{P}(A_7) = \frac{\binom{4}{3}\binom{13}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(8) $|A_8| = \binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{52-8}{1}$，

$\mathbb{P}(A_8) = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}$；

(9) $|A_9| = \binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3$，

$\mathbb{P}(A_9) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3}{\binom{52}{5}}$；

(10) 注意到，$A_1 \subset A_5$，$A_2 \subset A_5$，$A_3 \subset A_8$，$A_4 \subset A_9$，而$A_5, \cdots A_9$是两两互不相容的，所以$P(A_{10}) = 1 - P(\bigcup_{i=5}^{9} A_i))$

。

习题讲解

P58习题23: 任意从数列$1, 2, \cdots, N$中有放回地取出n 个数并按大小排成$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_m \le \cdots \le x_n$，试求$x_m = M$的概率。

习题讲解

P59习题29：在一线段AB随机地取两个点，将此线段截为三段。求这三线段能构成一个三角形的概率。

习题讲解

思考题：向画满间隔为a的平行直线的桌面上任意投放一三角形。假定三角形的三条边长l_1, l_2, l_3均小于a。求此三角形与某直线相交的概率。

解： 记

$$A = \{\text{三角形与平行线相交}\}$$

$$A_i = \{\text{第}i\text{条边与平行线相交}\}$$

习题讲解

思考题：向画满间隔为a的平行直线的桌面上任意投放一三角形。假定三角形的三条边长l_1, l_2, l_3均小于a。求此三角形与某直线相交的概率。

解： 记

$$A = \{\text{三角形与平行线相交}\}$$
$$A_i = \{\text{第}i\text{条边与平行线相交}\}$$

则$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$。由加法定理得

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 3} \mathbb{P}(A_i A_j) + \mathbb{P}(A_1 A_2 A_3)$$

另一方面，平行线和三角形相交的充分必要条件是和三角形的两条边相交，即

$$A = \bigcup_{1 \le i < j \le 3} (A_i A_j)$$

另一方面，平行线和三角形相交的充分必要条件是和三角形的两条边相交，即

$$A = \bigcup_{1 \le i < j \le 3} (A_i A_j)$$

再次利用加法公式可以得到

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{1 \le i < j \le 3} \mathbb{P}(A_i A_j) \\ &\quad - \binom{3}{2} \mathbb{P}(A_1 A_2 A_3) + \mathbb{P}(A_1 A_2 A_3) \end{aligned}$$

注意到

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{2l_i}{a\pi}, \quad \mathbb{P}(A_1 A_2 A_3) = 0$$

可得

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i) = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{a\pi}$$

习题讲解

P59习题32：用概率想法证明对任何正整数$a<A$有

$$\frac{A}{a}=1+\frac{A-a}{A-1}+\frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)}+\cdots+\frac{(A-a)(A-a-1)\cdots 2\cdot 1}{(A-1)(A-2)\cdots(a+1)a}$$

解： 仅需证明

$$1=\sum_{k=1}^{A-a+1}\frac{(A-a)!\,(A-k)!a}{(A-a-k+1)!A!}$$

习题讲解

P59习题32：用概率想法证明对任何正整数$a < A$有

$$\frac{A}{a} = 1 + \frac{A-a}{A-1} + \frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)} + \cdots + \frac{(A-a)(A-a-1)\cdots 2\cdot 1}{(A-1)(A-2)\cdots(a+1)a}$$

解： 仅需证明

$$1 = \sum_{k=1}^{A-a+1} \frac{(A-a)!\,(A-k)!a}{(A-a-k+1)!A!}$$

考虑袋中有a个白球，$A-a$个黑球，依次任意不放回从袋中将球摸出。

习题讲解

P59习题32：用概率想法证明对任何正整数$a < A$有

$$\frac{A}{a} = 1 + \frac{A-a}{A-1} + \frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)} + \cdots + \frac{(A-a)(A-a-1)\cdots 2\cdot 1}{(A-1)(A-2)\cdots(a+1)a}$$

解： 仅需证明

$$1 = \sum_{k=1}^{A-a+1} \frac{(A-a)!\,(A-k)!a}{(A-a-k+1)!A!}$$

考虑袋中有a个白球，$A-a$个黑球，依次任意不放回从袋中将球摸出。对于$1 \le k \le A-a+1$，记

$$B_k = \{首次摸到白球的次数为k\}$$

习题讲解

P59习题32：用概率想法证明对任何正整数$a < A$有

$$\frac{A}{a} = 1 + \frac{A-a}{A-1} + \frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)} + \cdots + \frac{(A-a)(A-a-1)\cdots 2\cdot 1}{(A-1)(A-2)\cdots(a+1)a}$$

解： 仅需证明

$$1 = \sum_{k=1}^{A-a+1} \frac{(A-a)!\,(A-k)!a}{(A-a-k+1)!A!}$$

考虑袋中有a个白球，$A-a$个黑球，依次任意不放回从袋中将球摸出。对于$1 \le k \le A-a+1$，记

$$B_k = \{首次摸到白球的次数为k\}$$

则诸B_k互不相容，且$\Omega = \bigcup_{k=1}^{A-a+1} B_k$。

进一步，

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{a}{A}$$

进一步,

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{a}{A}$$

$$\mathbb{P}(B_k)$$

$$= \frac{(A-a)!\,(A-k+1)!}{(A-a-k+1)!A!} \cdot \frac{a}{A-k+1}$$

$$=$$

进一步,

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{a}{A}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(B_k) \\
&= \frac{(A-a)!\,(A-k+1)!}{(A-a-k+1)!A!} \cdot \frac{a}{A-k+1} \\
&= \frac{(A-a)!\,(A-k)!a}{(A-a-k+1)!A!}, \qquad k \geq 1
\end{aligned}$$

进一步，

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{a}{A}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(B_k) \\
&= \frac{(A-a)!\,(A-k+1)!}{(A-a-k+1)!A!} \cdot \frac{a}{A-k+1} \\
&= \frac{(A-a)!\,(A-k)!a}{(A-a-k+1)!A!}, \qquad k \geq 1
\end{aligned}$$

利用概率的有限可加性得结论。

习题讲解

P59 习题33: 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是n个随机事件，试用归纳法证明如下广义加法公式：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_iA_j) + \cdots + (-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

习题讲解

P59习题34-35：某班有n个士兵，每人各有一枪，在一次夜间紧急集合中，若每人随机地取走一枝枪，

(i)问至少有一人拿到自己枪的概率;

(ii)恰有$k(k < n)$个人拿到自己枪的概率。

习题讲解

P60习题42：父、母、子3人举行比赛，每局总有一人胜一人负（没有和局），每局的优胜者就与未参加此局比赛的人再进行比赛，如果某人首先胜了两局，则他就是整个比赛的优胜者，由父决定第一局哪两人参加，其中儿子实力最强，父亲为了使自己得胜的概率达到最大，问他应该决定第一局由哪两个参加比赛？（假定每个人在整个比赛中胜其他人的概率时不变的）

习题讲解

P113习题19：试证事件$A_1, \cdots, A_n$相互独立的充要条件是：对于每个$\hat{A}_k = A_k$或$\bar{A}_k$（$k = 1, \cdots, n$）总有

$$P\left(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_n\right) = P\left(\hat{A}_1\right) \cdots P\left(\hat{A}_n\right)$$

证明： 对n用数学归纳法。显然当$n = 2$时结论成立。设在n之前结论成立，往证$n + 1$结论还成立。

$n + 1$**时必要性的证明：**

设$A_1, \cdots, A_n, A_{n+1}$相互独立，往证

$$\begin{aligned} & P(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_{n-1} \hat{A}_n \hat{A}_{n+1}) \\ & = P(\hat{A}_1) \cdots P(\hat{A}_{n-1}) P(\hat{A}_n) P(\hat{A}_{n+1}) \end{aligned}$$

习题讲解

P113习题19：试证事件$A_1, \cdots, A_n$相互独立的充要条件是：对于每个$\hat{A}_k = A_k$或$\bar{A}_k$（$k = 1, \cdots, n$）总有

$$P\left(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_n\right) = P\left(\hat{A}_1\right) \cdots P\left(\hat{A}_n\right)$$

证明： 对n用数学归纳法。显然当$n = 2$时结论成立。设在n之前结论成立，往证$n+1$结论还成立。

$n+1$时必要性的证明：

设$A_1, \cdots, A_n, A_{n+1}$相互独立，往证

$$\begin{aligned} &P(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_{n-1} \hat{A}_n \hat{A}_{n+1}) \\ &= P(\hat{A}_1) \cdots P(\hat{A}_{n-1}) P(\hat{A}_n) P(\hat{A}_{n+1}) \end{aligned}$$

记

$B_i = A_i$，$1 \le i \le n-1$，

$B_n = A_n A_{n+1}$。

则$B_1, \cdots, B_n$相互独立。由归纳假设，

$$P(\hat{B}_1 \cdots \hat{B}_n) = P(\hat{B}_1) \cdots P(\hat{B}_n),$$

再由

$$P(B_n) = P(A_n)P(A_{n+1})$$

得

$$\begin{aligned} & P(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_{n-1} A_n A_{n+1}) \\ = {} & P(\hat{A}_1) \cdots P(\hat{A}_{n-1}) P(A_n) P(A_{n+1}) \end{aligned}$$

$$P(\hat{B}_1\cdots\hat{B}_n)=P(\hat{B}_1)\cdots P(\hat{B}_n),$$

再由

$$P(B_n)=P(A_n)P(A_{n+1})$$

得

$$\begin{aligned}&P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{n-1}A_nA_{n+1})\\&=P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{n-1})P(A_n)P(A_{n+1})\end{aligned}$$

类似地，把$A_n\bar{A}_{n+1}$，$\bar{A}_nA_{n+1}$或$\bar{A}_n\bar{A}_{n+1}$看成B_n可以得到

$$\begin{aligned}&P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{n-1}A_n\bar{A}_{n+1})\\&=P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{n-1})P(A_n)P(\bar{A}_{n+1})\end{aligned}$$

$$P(\hat{B}_1\cdots\hat{B}_n)=P(\hat{B}_1)\cdots P(\hat{B}_n),$$

再由

$$P(B_n)=P(A_n)P(A_{n+1})$$

得

$$\begin{aligned}&P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{n-1}A_nA_{n+1})\\&=P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{n-1})P(A_n)P(A_{n+1})\end{aligned}$$

类似地，把$A_n\bar{A}_{n+1}$，$\bar{A}_nA_{n+1}$或$\bar{A}_n\bar{A}_{n+1}$看成B_n可以得到

$$\begin{aligned}&P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{n-1}A_n\bar{A}_{n+1})\\&=P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{n-1})P(A_n)P(\bar{A}_{n+1})\\&P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{n-1}\bar{A}_nA_{n+1})\\&=P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{n-1})P(\bar{A}_n)P(A_{n+1})\end{aligned}$$

$$P(\hat{B}_1\cdots\hat{B}_n)=P(\hat{B}_1)\cdots P(\hat{B}_n),$$

再由

$$P(B_n)=P(A_n)P(A_{n+1})$$

得

$$\begin{aligned}&P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{n-1}A_nA_{n+1})\\&=P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{n-1})P(A_n)P(A_{n+1})\end{aligned}$$

类似地，把$A_n\bar{A}_{n+1}$，$\bar{A}_nA_{n+1}$或$\bar{A}_n\bar{A}_{n+1}$看成B_n可以得到

$$\begin{aligned}&P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{n-1}A_n\bar{A}_{n+1})\\&=P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{n-1})P(A_n)P(\bar{A}_{n+1})\\&P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{n-1}\bar{A}_nA_{n+1})\\&=P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{n-1})P(\bar{A}_n)P(A_{n+1})\\&P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{n-1}\bar{A}_n\bar{A}_{n+1})\\&=P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{n-1})P(\bar{A}_n)P(\bar{A}_{n+1})\end{aligned}$$

$$P(\hat{B}_1 \cdots \hat{B}_n) = P(\hat{B}_1) \cdots P(\hat{B}_n),$$

再由

$$P(B_n) = P(A_n)P(A_{n+1})$$

得

$$\begin{aligned} & P(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_{n-1} A_n A_{n+1}) \\ & = P(\hat{A}_1) \cdots P(\hat{A}_{n-1}) P(A_n) P(A_{n+1}) \end{aligned}$$

类似地，把$A_n\bar{A}_{n+1}$，$\bar{A}_nA_{n+1}$或$\bar{A}_n\bar{A}_{n+1}$看成B_n可以得到

$$\begin{aligned} & P(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_{n-1} A_n \bar{A}_{n+1}) \\ & = P(\hat{A}_1) \cdots P(\hat{A}_{n-1}) P(A_n) P(\bar{A}_{n+1}) \\ & P(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_{n-1} \bar{A}_n A_{n+1}) \\ & = P(\hat{A}_1) \cdots P(\hat{A}_{n-1}) P(\bar{A}_n) P(A_{n+1}) \\ & P(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_{n-1} \bar{A}_n \bar{A}_{n+1}) \\ & = P(\hat{A}_1) \cdots P(\hat{A}_{n-1}) P(\bar{A}_n) P(\bar{A}_{n+1}) \end{aligned}$$

因此$n+1$时必要性成立。

$n+1$时充分性的证明：

设
$$
\begin{aligned}
&P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_n\hat{A}_{n+1})\\
&=P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_n)P(\hat{A}_{n+1})
\end{aligned}
$$
往证$A_1,\cdots,A_{n+1}$相互独立。

因此$n+1$时必要性成立。

$n+1$时充分性的证明：

设

$$P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_n\hat{A}_{n+1}) \\ =P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_n)P(\hat{A}_{n+1})$$

往证$A_1,\cdots,A_{n+1}$相互独立。

为此仅需证明

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k})$$

其中$1<k<n+1$，$1\le i_1<\cdots<i_k\le n+1$。事实上，

取$j\in\{1,\cdots,n+1\}-\{i_1,\cdots,i_k\}$有

$$
\begin{aligned}
&P\left(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{j-1}A_j\hat{A}_{j+1}\cdots\hat{A}_{n+1}\right)\\
=&P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{j-1})\\
&\qquad\times P(A_j)P(\hat{A}_{j+1})\cdots P(\hat{A}_{n+1})
\end{aligned}
$$

$$P\left(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{j-1}A_j\hat{A}_{j+1}\cdots\hat{A}_{n+1}\right)$$
$$=P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{j-1})$$
$$\times P(A_j)P(\hat{A}_{j+1})\cdots P(\hat{A}_{n+1})$$
$$P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{j-1}\bar{A}_j\hat{A}_{j+1}\cdots\hat{A}_{n+1})$$
$$=P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{j-1})$$
$$\times P(\bar{A}_j)P(\hat{A}_{j+1})\cdots P(\hat{A}_{n+1})$$

两式相加有

$$P(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_{j-1}\hat{A}_{j+1} \cdots \hat{A}_{n+1}) =$$
$$P(\hat{A}_1) \cdots P(\hat{A}_{j-1})P(\hat{A}_{j+1}) \cdots P(\hat{A}_{n+1})$$

两式相加有

$$P(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_{j-1}\hat{A}_{j+1} \cdots \hat{A}_{n+1}) = \\ P(\hat{A}_1) \cdots P(\hat{A}_{j-1})P(\hat{A}_{j+1}) \cdots P(\hat{A}_{n+1})$$

由归纳假设知

$$A_1, \cdots, A_{j-1}, A_{j+1}, \cdots, A_{n+1}$$

相互独立。

两式相加有

$$P(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{j-1}\hat{A}_{j+1}\cdots\hat{A}_{n+1})=$$
$$P(\hat{A}_1)\cdots P(\hat{A}_{j-1})P(\hat{A}_{j+1})\cdots P(\hat{A}_{n+1})$$

由归纳假设知

$$A_1,\cdots,A_{j-1},A_{j+1},\cdots,A_{n+1}$$

相互独立。再注意到

$$\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n+1\}$$

得$n+1$时充分性。

解Monty Hall problem

解Monty Hall problem

蒙提霍尔问题（Monty Hall problem），是一个源自博弈论的数学游戏问题，出自美国的电视游戏节目Let's Make a Deal。问题的名字来自该节目的主持人蒙提·霍尔（Monty Hall）。这个游戏的玩法是：参赛者会看见三扇关闭了的门，其中一扇的后面有一辆汽车，选中后面有车的那扇门就可以赢得该汽车，而另外两扇门后面则各藏有一只山羊。当参赛者选定了一扇门，但未去开启它的时候，节目主持人会开启剩下两扇门的其中一扇，露出其中一只山羊。主持人其后会问参赛者要不要换另一扇仍然关上的门。

P112习题8假设一架坠毁的飞机掉在3个可能趋于中的任何一个是等概率的。如果飞机坠落在区域i中（$i=1,2,3$），则由地理环境的影响，经过快速检查后发现其残骸的概率为α_i（$0<\alpha_i<1$）。现快速检查区域1后未发现残骸，求飞机坠落在区域i的概率。

解：

记$A_i=\{$飞机坠落在区域$i\}$,

P112习题8假设一架坠毁的飞机掉在3个可能趋于中的任何一个是等概率的。如果飞机坠落在区域i中（$i = 1, 2, 3$），则由地理环境的影响，经过快速检查后发现其残骸的概率为α_i（$0 < \alpha_i < 1$）。现快速检查区域1后未发现残骸，求飞机坠落在区域i的概率。

解：

记$A_i = \{$飞机坠落在区域$i\}$，则

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(A_iA_j) = 0, \quad i \neq j$$

P112习题8假设一架坠毁的飞机掉在3个可能趋于中的任何一个是等概率的。如果飞机坠落在区域i中（$i=1,2,3$），则由地理环境的影响，经过快速检查后发现其残骸的概率为α_i（$0<\alpha_i<1$）。现快速检查区域1后未发现残骸，求飞机坠落在区域i的概率。

解：

记$A_i=\{$飞机坠落在区域$i\}$，则

$$\mathbb{P}(A_i)=\frac{1}{3},\quad \mathbb{P}(A_iA_j)=0,\quad i\neq j$$

记

$$B_i=\{\text{发现残骸在}i\text{区}\}$$

P112习题8假设一架坠毁的飞机掉在3个可能趋于中的任何一个是等概率的。如果飞机坠落在区域i中（$i = 1, 2, 3$），则由地理环境的影响，经过快速检查后发现其残骸的概率为α_i（$0 < \alpha_i < 1$）。现快速检查区域1后未发现残骸，求飞机坠落在区域i的概率。

解：

记$A_i = \{飞机坠落在区域i\}$，则

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(A_i A_j) = 0, \quad i \neq j$$

记

$$B_i = \{发现残骸在i区\}$$

则

$$\mathbb{P}(B_i \,|A_i\,) = \alpha_i,$$

$$\mathbb{P}(B_i\,|A_i\,) = \alpha_i,\ \mathbb{P}(\bar{B}_i\,|A_i\,) = 1-\alpha_i$$

$$\mathbb{P}(B_i \,|A_i\,) = \alpha_i,\ \mathbb{P}(\bar{B}_i \,|A_i\,) = 1 - \alpha_i$$

$$\mathbb{P}(\bar{B}_1 \,|A_i\,) = \begin{cases} 1 - \alpha_i, & i = 1 \\ 1, & i \neq 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(B_i \mid A_i) = \alpha_i,\ \mathbb{P}(\bar{B}_i \mid A_i) = 1 - \alpha_i$$

$$\mathbb{P}(\bar{B}_1 \mid A_i) = \begin{cases} 1 - \alpha_i, & i = 1 \\ 1, & i \neq 1 \end{cases}$$

由Bayes公式

$$\mathbb{P}(A_i \mid \bar{B}_1) = \frac{\mathbb{P}\left(\bar{B}_1 \mid A_i\right)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{3}\mathbb{P}\left(\bar{B}_1 \mid A_k\right)\mathbb{P}(A_k)}$$

$$=$$

$$\mathbb{P}(B_i \,|A_i\,) = \alpha_i,\ \mathbb{P}(\bar{B}_i \,|A_i\,) = 1 - \alpha_i$$

$$\mathbb{P}(\bar{B}_1 \,|A_i\,) = \begin{cases} 1 - \alpha_i, & i = 1 \\ 1, & i \neq 1 \end{cases}$$

由Bayes公式

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i \mid \bar{B}_1) &= \frac{\mathbb{P}\left(\bar{B}_1 \,|A_i\,\right)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{3}\mathbb{P}\left(\bar{B}_1 \,|A_k\,\right)\mathbb{P}(A_k)} \\ &= \begin{cases} \frac{1-\alpha_1}{3-\alpha_1}, & i = 1 \\ \frac{1}{3-\alpha_1}, & i = 2, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

内容小结

样本空间：

内容小结

样本空间：

事件：

内容小结

样本空间：

事件： 事件的运算，事件的独立性，事件域的公理化定义；

概率：

内容小结

样本空间：

事件： 事件的运算，事件的独立性，事件域的公理化定义；

概率： 概率的频率解释，公理化定义，性质，加法公式；

条件概率：

内容小结

样本空间：

事件： 事件的运算，事件的独立性，事件域的公理化定义；

概率： 概率的频率解释，公理化定义，性质，加法公式；

条件概率： 乘法公式，全概率公式，Bayes公式；

独立性：

内容小结

样本空间：

事件：事件的运算，事件的独立性，事件域的公理化定义；

概率：概率的频率解释，公理化定义，性质，加法公式；

条件概率：乘法公式，全概率公式，Bayes公式；

独立性：事件的独立性，试验的独立性，独立性在事件概率计算中的应用。

几个具体的概型

几个具体的概型

- 古典概型

几个具体的概型

- 古典概型
- 几何概型

几个具体的概型

- 古典概型
- 几何概型
- 贝努里概型

几个具体的概型

- 古典概型
- 几何概型
- 贝努里概型

掌握一个概型，要了解：

几个具体的概型

- 古典概型
- 几何概型
- 贝努里概型

掌握一个概型，要了解：

（1）概型的特征；
（2）概型的基本问题；
（3）概型的实例和应用；
（4）使用的基本工具。

古典概型的计算问题

例1甲抛$n+1$个，乙抛n个均匀硬币，求甲得正面比乙多的概率。

解： 记$A=\{$甲比乙多得正面$\}$ $B=\{$甲比乙多得反面$\}$
则A与B互不相容，事件A和B中有相同多的样本点。

古典概型的计算问题

例1甲抛$n+1$个，乙抛n个均匀硬币，求甲得正面比乙多的概率。

解： 记$A=\{甲比乙多得正面\}$ $B=\{甲比乙多得反面\}$
则A与B互不相容，事件A和B中有相同多的样本点。注意到

$$\Omega-(A\cup B)$$

表示不可能事件“甲和乙得正面数相等，反面数也相等”，可得$\Omega=A\cup B$,

古典概型的计算问题

例1甲抛$n+1$个，乙抛n个均匀硬币，求甲得正面比乙多的概率。

解： 记$A=\{甲比乙多得正面\}$ $B=\{甲比乙多得反面\}$
则A与B互不相容，事件A和B中有相同多的样本点。注意到

$$\Omega-(A\cup B)$$

表示不可能事件“甲和乙得正面数相等，反面数也相等”，可得$\Omega=A\cup B$，所以

$$|A|=|B|=\frac{1}{2}|\Omega|,$$

古典概型的计算问题

例1甲抛$n+1$个，乙抛n个均匀硬币，求甲得正面比乙多的概率。

解： 记$A=\{$甲比乙多得正面$\}$ $B=\{$甲比乙多得反面$\}$
则A与B互不相容，事件A和B中有相同多的样本点。注意到

$$\Omega-(A\cup B)$$

表示不可能事件“甲和乙得正面数相等，反面数也相等”，可得$\Omega=A\cup B$，所以

$$|A|=|B|=\frac{1}{2}|\Omega|,\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$$

古典概型的计算问题

例1甲抛$n+1$个，乙抛n个均匀硬币，求甲得正面比乙多的概率。

解： 记$A=\{$甲比乙多得正面$\}$ $B=\{$甲比乙多得反面$\}$
则A与B互不相容，事件A和B中有相同多的样本点。注意到

$$\Omega-(A\cup B)$$

表示不可能事件“甲和乙得正面数相等，反面数也相等”，可得$\Omega=A\cup B$，所以

$$|A|=|B|=\frac{1}{2}|\Omega|, \mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$$

注： 若甲抛$n+2$，乙抛n次，则

$$B=\{\text{甲比乙多得反面}\}\neq\{\text{甲得正面数不超过乙的正面数}\},$$

从而$AB\neq\emptyset$，从而不能得到$\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$的结论，此时应该如何计算？

古典概型的计算问题

例2 把n个完全相同的球随机地放入N个盒子中（即球放入盒子后，只能区别盒子中球的个数，不能区别是哪个球进入某个盒子，这时也称球是不可辨的）。如果每一种放法都是等可能的，求下列事件的概率

（1）某一个指定的盒子中恰好有k个球；

（2）恰好有m个空盒；

（3）指定的m个盒中正好有j 个球。

古典概型的计算问题

例2 把n个完全相同的球随机地放入N个盒子中（即球放入盒子后，只能区别盒子中球的个数，不能区别是哪个球进入某个盒子，这时也称球是不可辨的）。如果每一种放法都是等可能的，求下列事件的概率

（1）某一个指定的盒子中恰好有k个球；

（2）恰好有m个空盒；

（3）指定的m个盒中正好有j 个球。

例3

从$1, 2, \dots, 10$这十个数字中随机地有放回地取7个数字，试求：

(1)7个数字之和为10的概率；

(2) 7个数字之和为20的概率。

反射原理

例4（反射原理）
设袋中有n个白球和m个黑球$(n > m)$，现在随机地接连从袋中不放回取球，直到将球全部取出，试求： (a)在取球过程中，在某一时刻取出的白球数和黑球数相等的概率； (b)白球数总比黑球数多的概率。
解： 设第i次取到白球记为1,取到黑球记为-1，即令

反射原理

例4（反射原理）
设袋中有n个白球和m个黑球$(n > m)$，现在随机地接连从袋中不放回取球，直到将球全部取出，试求： (a)在取球过程中，在某一时刻取出的白球数和黑球数相等的概率； (b)白球数总比黑球数多的概率。

解： 设第i次取到白球记为1,取到黑球记为-1，即令

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次取到白球} \\ -1, & \text{第}i\text{次取到黑球} \end{cases} \qquad i = 1, 2 \cdots, m+n$$

再令$S_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i$，于是$(i, S_i)$，$i = 1, 2, \cdots, m+n$便可以产生二维格子点上从点$(0,0)$到点$(m+n, n-m)$的一条折线，并且这种折线与取球结果是一一对应的。

反射原理

例4（反射原理）
设袋中有n个白球和m个黑球$(n > m)$，现在随机地接连从袋中不放回取球，直到将球全部取出，试求： (a)在取球过程中，在某一时刻取出的白球数和黑球数相等的概率； (b)白球数总比黑球数多的概率。
解： 设第i次取到白球记为1,取到黑球记为-1，即令

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次取到白球} \\ -1, & \text{第}i\text{次取到黑球} \end{cases} \qquad i = 1, 2 \cdots, m+n$$

再令$S_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i$，于是$(i, S_i)$，$i = 1, 2, \cdots, m+n$便可以产生二维格子点上从点$(0,0)$到点$(m+n, n-m)$的一条折线，并且这种折线与取球结果是一一对应的。
“在取球过程中，在某一时刻取出的白球数和黑球数相等”等价于“上述折线与x轴有交点”。

从点$(0,0)$到点$(m+n,n-m)$的所有折线中可以分为三类,

从点$(0,0)$到点$(m+n,n-m)$的所有折线中可以分为三类，第一类是第一次到点$(1,1)$而与x轴没有交点；

从点$(0,0)$到点$(m+n,n-m)$的所有折线中可以分为三类，第一类是第一次到点$(1,1)$而与x轴没有交点；第二类是第一次到点$(1,1)$而与x轴有交点；

从点$(0,0)$到点$(m+n,n-m)$的所有折线中可以分为三类，第一类是第一次到点$(1,1)$而与x轴没有交点；第二类是第一次到点$(1,1)$而与x轴有交点；第三类是第一次到点$(1,-1)$，由于折线的终端是$(n+m,n-m)$，

从点$(0,0)$到点$(m+n,n-m)$的所有折线中可以分为三类，第一类是第一次到点$(1,1)$而与x轴没有交点；第二类是第一次到点$(1,1)$而与x轴有交点；第三类是第一次到点$(1,-1)$，由于折线的终端是$(n+m,n-m)$，第三类折线与在与x轴一定有交点，且个数为：

从点$(0,0)$到点$(m+n,n-m)$的所有折线中可以分为三类，第一类是第一次到点$(1,1)$而与x轴没有交点；第二类是第一次到点$(1,1)$而与x轴有交点；第三类是第一次到点$(1,-1)$，由于折线的终端是$(n+m,n-m)$，第三类折线与在与x轴一定有交点，且个数为：$\binom{n+m-1}{m-1}$，现在的关键是如何计算第一类或第二类折线的个数？

从点$(0,0)$到点$(m+n,n-m)$的所有折线中可以分为三类，第一类是第一次到点$(1,1)$而与x轴没有交点；第二类是第一次到点$(1,1)$而与x轴有交点；第三类是第一次到点$(1,-1)$，由于折线的终端是$(n+m,n-m)$，第三类折线与在与x轴一定有交点，且个数为：$\binom{n+m-1}{m-1}$，现在的关键是如何计算第一类或第二类折线的个数？注意到，如果将第二类折线中的某一条折线在起始点$(0,0)$与首次与x轴相交之间关于x轴做反射其后不变，这样便得到一条第三类折线，反之亦然。这说明第二类折线的数目与第三类折线的数目一样多，即：$\binom{n+m-1}{m-1}$。这就是反射原理。

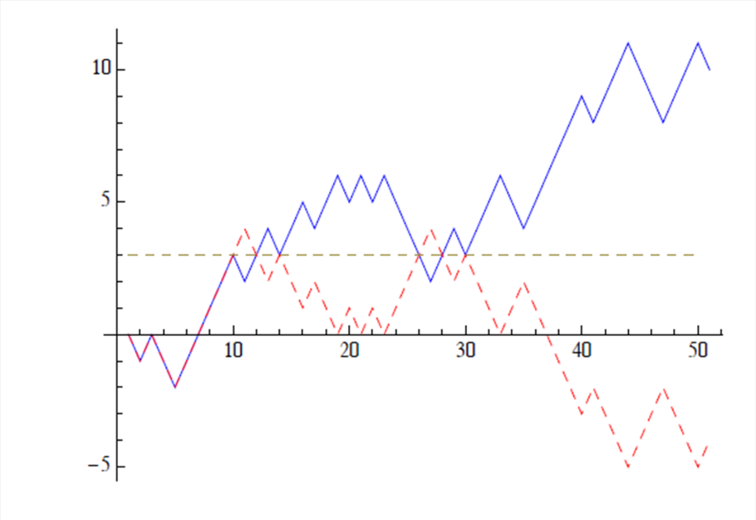
从点$(0,0)$到点$(m+n,n-m)$的所有折线中可以分为三类，第一类是第一次到点$(1,1)$而与x轴没有交点；第二类是第一次到点$(1,1)$而与x轴有交点；第三类是第一次到点$(1,-1)$，由于折线的终端是$(n+m,n-m)$，第三类折线与在与x轴一定有交点，且个数为：$\binom{n+m-1}{m-1}$，现在的关键是如何计算第一类或第二类折线的个数？注意到，如果将第二类折线中的某一条折线在起始点$(0,0)$与首次与x轴相交之间关于x轴做反射其后不变，这样便得到一条第三类折线，反之亦然。这说明第二类折线的数目与第三类折线的数目一样多，即：$\binom{n+m-1}{m-1}$。这就是反射原理。

第一类折线的数目为：

从点$(0,0)$到点$(m+n,n-m)$的所有折线中可以分为三类，第一类是第一次到点$(1,1)$而与x轴没有交点；第二类是第一次到点$(1,1)$而与x轴有交点；第三类是第一次到点$(1,-1)$，由于折线的终端是$(n+m,n-m)$，第三类折线与在与x轴一定有交点，且个数为：$\binom{n+m-1}{m-1}$，现在的关键是如何计算第一类或第二类折线的个数？注意到，如果将第二类折线中的某一条折线在起始点$(0,0)$与首次与x轴相交之间关于x轴做反射其后不变，这样便得到一条第三类折线，反之亦然。这说明第二类折线的数目与第三类折线的数目一样多，即：$\binom{n+m-1}{m-1}$。这就是反射原理。

第一类折线的数目为：$\binom{n+m}{m}-2\binom{n+m-1}{m-1}$。

9.反射原理图示



反射原理的图

于是:

$$P(\text{某一时刻取出的白球数和黑球数相等}) =$$

于是：

$$P(\text{某一时刻取出的白球数和黑球数相等}) = \frac{2\binom{n+m-1}{m-1}}{n+mm} = \frac{2m}{n+m}$$

于是：

$$P(\text{某一时刻取出的白球数和黑球数相等}) = \frac{2\binom{n+m-1}{m-1}}{n+mm} = \frac{2m}{n+m}$$

$$P(\text{白球数总比黑球数多}) =$$

于是：

$$P(\text{某一时刻取出的白球数和黑球数相等}) = \frac{2\binom{n+m-1}{m-1}}{n+mm} = \frac{2m}{n+m}$$

$$P(\text{白球数总比黑球数多}) = \frac{\binom{n+m}{m} - 2\binom{n+m-1}{m-1}}{n+mm} = \frac{n-m}{n+m}$$

反射原理的应用

例5

假定在一次选举中，候选人甲得n张票，候选人乙得m张票，$(n > m)$ 试求在计票过程中，（a）出现两个人票数相等的概率（b）甲的票数始终比乙的票数多的概率，（c）出现乙的票数多于甲的票数的概率。

例6

剧院售票处前有$2n$个人排队买票，其中n个人只有50元钱一张的钞票，其余n个人只有100元钱一张的钞票。开始售票时售票处无零钱可找，而每个人只买一张50元钱的戏票，求售票处不会找不出钱的概率。

反射原理的应用

解： 令

$$\xi_i =$$

反射原理的应用

解： 令

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个买票的人持有50元} \\ -1, & \text{第}i\text{个买票的人持有100元} \end{cases} \qquad i = 1, 2 \cdots, 2n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{2n} \xi_i$$

反射原理的应用

解： 令

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个买票的人持有50元} \\ -1, & \text{第}i\text{个买票的人持有100元} \end{cases} \qquad i = 1, 2 \cdots, 2n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{2n} \xi_i$$

则卖票的结果与点(i, S_i)，$i = 1, \cdots, 2n$在二维格点上产生的折线一一对应。

反射原理的应用

解：令

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个买票的人持有50元} \\ -1, & \text{第}i\text{个买票的人持有100元} \end{cases} \qquad i = 1, 2 \cdots, 2n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{2n} \xi_i$$

则卖票的结果与点(i, S_i)，$i = 1, \cdots, 2n$在二维格点上产生的折线一一对应。

设A表示“售票处不会找不出钱”，由于$\overline{A}$中的样本点

反射原理的应用

解： 令

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个买票的人持有50元} \\ -1, & \text{第}i\text{个买票的人持有100元} \end{cases} \qquad i = 1, 2 \cdots, 2n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{2n} \xi_i$$

则卖票的结果与点(i, S_i)，$i = 1, \cdots, 2n$在二维格点上产生的折线一一对应。
设A表示“售票处不会找不出钱”，由于$\overline{A}$中的样本点相应于穿过x轴与直线$y = -1$相遇的折线的全体。

为了计算此种折线的数目，

为了计算此种折线的数目，将从与直线$y=-1$初次相遇时，关于直线$y=-1$做反射，之前保持不变。

为了计算此种折线的数目，将从与直线$y=-1$初次相遇时，关于直线$y=-1$做反射，之前保持不变。反射后得到的新的折线数目与原来的折线数目一样多。

为了计算此种折线的数目，将从与直线$y=-1$初次相遇时，关于直线$y=-1$做反射，之前保持不变。反射后得到的新的折线数目与原来的折线数目一样多。注意到，点$(2n,0)$关于$y=-1$的反射点为

为了计算此种折线的数目，将从与直线$y=-1$初次相遇时，关于直线$y=-1$做反射，之前保持不变。反射后得到的新的折线数目与原来的折线数目一样多。注意到，点$(2n,0)$关于$y=-1$的反射点为$(2n,-2)$，于是新折线是从点$(0,0)$开始到点

为了计算此种折线的数目，将从与直线$y=-1$初次相遇时，关于直线$y=-1$做反射，之前保持不变。反射后得到的新的折线数目与原来的折线数目一样多。注意到，点$(2n,0)$关于$y=-1$的反射点为$(2n,-2)$，于是新折线是从点$(0,0)$开始到点$(2n,-2)$为止的折线，且构成这样路径中的-1比$+1$的数目

为了计算此种折线的数目，将从与直线$y=-1$初次相遇时，关于直线$y=-1$做反射，之前保持不变。反射后得到的新的折线数目与原来的折线数目一样多。注意到，点$(2n,0)$关于$y=-1$的反射点为$(2n,-2)$，于是新折线是从点$(0,0)$开始到点$(2n,-2)$为止的折线，且构成这样路径中的-1比$+1$的数目多2 个，于是这样的这线数目为：

为了计算此种折线的数目，将从与直线$y=-1$初次相遇时，关于直线$y=-1$做反射，之前保持不变。反射后得到的新的折线数目与原来的折线数目一样多。注意到，点$(2n,0)$关于$y=-1$的反射点为$(2n,-2)$，于是新折线是从点$(0,0)$开始到点$(2n,-2)$为止的折线，且构成这样路径中的-1比$+1$的数目多2 个，于是这样的这线数目为：$\binom{2n}{n-1}$，于是：

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\begin{pmatrix}2n\\ n-12nn\end{pmatrix}=\frac{1}{n+1}$$

全概率公式的应用

例7

接连掷一枚均匀硬币，直到第一次连续出现两次正面为止。求恰抛n次的概率。

解： 记

$$
\begin{aligned}
A_n &= \{\text{恰在第}n\text{次抛出连续两个正面}\} \\
p_n &= \mathbb{P}(A_n) \\
B_k &= \{\text{第}k\text{次抛出正面}\}
\end{aligned}
$$

全概率公式的应用

例7

接连掷一枚均匀硬币，直到第一次连续出现两次正面为止。求恰抛n次的概率。

解： 记

$$A_n = \{恰在第n次抛出连续两个正面\}$$
$$p_n = \mathbb{P}(A_n)$$
$$B_k = \{第k次抛出正面\}$$

全概率公式的应用

例7

接连掷一枚均匀硬币，直到第一次连续出现两次正面为止。求恰抛n次的概率。

解： 记

$$\begin{aligned} A_n &= \{\text{恰在第}n\text{次抛出连续两个正面}\} \\ p_n &= \mathbb{P}(A_n) \\ B_k &= \{\text{第}k\text{次抛出正面}\} \end{aligned}$$

则$\bar{B}_1$，B_1B_2和$B_1\bar{B}_2$ 恰为概率空间的一个分割。当$n > 2$时，由全概率公式:

$$\begin{aligned} p_n = &\ \mathbb{P}(\bar{B}_1)\mathbb{P}(A_n|\bar{B}_1) \\ &+ \mathbb{P}(B_1B_2)\mathbb{P}(A_n|B_1B_2) \\ &\quad + \mathbb{P}(B_1\bar{B}_2)\mathbb{P}(A_n|B_1\bar{B}_2) \\ \\ = & \end{aligned}$$

全概率公式的应用

例7

接连掷一枚均匀硬币，直到第一次连续出现两次正面为止。求恰抛n次的概率。

解： 记

$$A_n = \{恰在第n次抛出连续两个正面\}$$
$$p_n = \mathbb{P}(A_n)$$
$$B_k = \{第k次抛出正面\}$$

则$\bar{B}_1$，B_1B_2和$B_1\bar{B}_2$ 恰为概率空间的一个分割。当$n > 2$时，由全概率公式:

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}(\bar{B}_1)\mathbb{P}(A_n|\bar{B}_1) \\ &\quad + \mathbb{P}(B_1B_2)\mathbb{P}(A_n|B_1B_2) \\ &\qquad + \mathbb{P}(B_1\bar{B}_2)\mathbb{P}(A_n|B_1\bar{B}_2) \\ &= \frac{1}{2}p_{n-1} + 0 + \frac{1}{4}p_{n-2} \\ &= \end{aligned}$$

全概率公式的应用

例7

接连掷一枚均匀硬币，直到第一次连续出现两次正面为止。求恰抛n次的概率。

解： 记

$$A_n = \{\text{恰在第}n\text{次抛出连续两个正面}\}$$
$$p_n = \mathbb{P}(A_n)$$
$$B_k = \{\text{第}k\text{次抛出正面}\}$$

则$\bar{B}_1$，B_1B_2和$B_1\bar{B}_2$ 恰为概率空间的一个分割。当$n > 2$时，由全概率公式:

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}(\bar{B}_1)\mathbb{P}(A_n|\bar{B}_1) \\ &\quad + \mathbb{P}(B_1B_2)\mathbb{P}(A_n|B_1B_2) \\ &\qquad + \mathbb{P}(B_1\bar{B}_2)\mathbb{P}(A_n|B_1\bar{B}_2) \\ &= \frac{1}{2}p_{n-1} + 0 + \frac{1}{4}p_{n-2} \\ &= \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} \end{aligned}$$

全概率公式的应用

例7

接连掷一枚均匀硬币，直到第一次连续出现两次正面为止。求恰抛n次的概率。

解： 记

$$A_n = \{\text{恰在第}n\text{次抛出连续两个正面}\}$$
$$p_n = \mathbb{P}(A_n)$$
$$B_k = \{\text{第}k\text{次抛出正面}\}$$

则$\bar{B}_1$，B_1B_2和$B_1\bar{B}_2$ 恰为概率空间的一个分割。当$n > 2$时，由全概率公式:

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}(\bar{B}_1)\mathbb{P}(A_n|\bar{B}_1) \\ &\quad + \mathbb{P}(B_1B_2)\mathbb{P}(A_n|B_1B_2) \\ &\qquad + \mathbb{P}(B_1\bar{B}_2)\mathbb{P}(A_n|B_1\bar{B}_2) \\ &= \frac{1}{2}p_{n-1} + 0 + \frac{1}{4}p_{n-2} \\ &= \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} \end{aligned}$$

全概率公式的应用

为求解差分方程

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}, \quad 2 < n$$

全概率公式的应用

为求解差分方程

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}, \quad 2 < n$$

可将它改写为如下便于递推的形式

$$p_n - ap_{n-1} = b(p_{n-1} - ap_{n-2})$$

全概率公式的应用

为求解差分方程

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}, \quad 2 < n$$

可将它改写为如下便于递推的形式

$$p_n - ap_{n-1} = b(p_{n-1} - ap_{n-2})$$

其中a和b是待定常数。将上式变形代入差分方程有

$$(a+b)p_{n-1} - abp_{n-2} = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}$$

全概率公式的应用

为求解差分方程

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}, \quad 2 < n$$

可将它改写为如下便于递推的形式

$$p_n - ap_{n-1} = b(p_{n-1} - ap_{n-2})$$

其中a和b是待定常数。将上式变形代入差分方程有

$$(a+b)p_{n-1} - abp_{n-2} = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}$$

取$a+b=\frac{1}{2}$，$ab=-\frac{1}{4}$，解之得

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \; b = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

全概率公式的应用

为求解差分方程

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}, \quad 2 < n$$

可将它改写为如下便于递推的形式

$$p_n - ap_{n-1} = b(p_{n-1} - ap_{n-2})$$

其中a和b是待定常数。将上式变形代入差分方程有

$$(a+b)p_{n-1} - abp_{n-2} = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}$$

取$a+b=\frac{1}{2}$，$ab=-\frac{1}{4}$，解之得

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

另一方面，注意到$p_2 = \frac{1}{4}$，$p_1 = 0$，通过递推式得

全概率公式的应用

为求解差分方程

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}, \quad 2 < n$$

可将它改写为如下便于递推的形式

$$p_n - ap_{n-1} = b(p_{n-1} - ap_{n-2})$$

其中a和b是待定常数。将上式变形代入差分方程有

$$(a+b)p_{n-1} - abp_{n-2} = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}$$

取$a+b=\frac{1}{2}$，$ab=-\frac{1}{4}$，解之得

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \ b = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

另一方面，注意到$p_2 = \frac{1}{4}$，$p_1 = 0$，通过递推式得

全概率公式的应用

即

$$p_n = \frac{1}{4}b^{n-2} + ap_{n-1}, \quad n \geq 2$$

全概率公式的应用

即

$$p_n = \frac{1}{4}b^{n-2} + ap_{n-1}, \quad n \geq 2$$

递推得

$$p_n = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-2} a^k b^{n-2-k} + a^{n-1}p_1$$

$$=$$

全概率公式的应用

即

$$p_n = \frac{1}{4}b^{n-2} + ap_{n-1}, \quad n \geq 2$$

递推得

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-2} a^k b^{n-2-k} + a^{n-1}p_1 \\ &= \frac{1}{4}b^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{a}{b}\right)^k \\ &= \end{aligned}$$

全概率公式的应用

即

$$p_n = \frac{1}{4}b^{n-2} + ap_{n-1}, \quad n \geq 2$$

递推得

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-2} a^k b^{n-2-k} + a^{n-1}p_1 \\ &= \frac{1}{4}b^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{a}{b}\right)^k \\ &= \frac{1}{4}b^{n-2}\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}}{1-\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

全概率公式的应用

即

$$p_n = \frac{1}{4}b^{n-2} + ap_{n-1}, \quad n \geq 2$$

递推得

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-2} a^k b^{n-2-k} + a^{n-1}p_1 \\ &= \frac{1}{4}b^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{a}{b}\right)^k \\ &= \frac{1}{4}b^{n-2}\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}}{1-\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

将a和b的值带入整理得

$$p_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right)$$

全概率公式的应用

例8（P114习题34） 甲乙两袋中各装有1只白球和1只黑球，每次从甲乙两袋中随机各取一球交换放入另一袋中，这样进行了若干次，以p_n, q_n, r_n分别记在第n次交换后甲袋中将有两只白球，一只白球一只黑球和两只黑球的概率。求：p_n, q_n, r_n，并讨论当$n \to \infty$时的情况。

事件分析与概率计算

例9

点球决胜中，A队射进每只球的概率为p，B队射进每只球的概率为q，假定各次射门相互独立，多射进一球者便取胜，求A队取胜的概率。

例10

设A, B是试验E的两个互斥事件。已知$P(A) = p, P(B) = q, p > 0, q > 0$且$p + q < 1$，求当$E$独立重复进行时，事件$A$发生在事件$B$发生之前的概率。

例11

父、母、子3人举行比赛，每局总有一人胜一人负（没有和局），每局的优胜者就与未参加此局比赛的人再进行比赛，如果某人首先胜了两局，则他就是整个比赛的优胜者，由父决定第一局哪两人参加，其中儿子实力最强，父亲为了使自己得胜的概率达到最大，问他应该决定第一局由哪两个参加比赛？（假定每个人在整个比赛中胜其他人的概率时不变的）