1 第二章 条件概率与统计独立

条件概率的定义

定义：设$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一概率空间，$B \in \mathcal{F}$,
且$\mathbb{P}(B) > 0$ ，则对任意$A \in \mathcal{F}$,定义:

$$P(A \mid B) = P(AB)/P(B)$$

称$P(A \mid B)$为在事件B发生条件下事件A发生的条件概率（Conditional Probability）

例子

10个产品中有7个正品、3个次品，从中不放回地抽取两个，已知第一个取到次品，求第二个又取到次品的概率.

解： 设A $=\{$第一个取到次品$\}$,

B $=\{$第二个取到次品$\}$,

$$P(B \mid A) = P(BA)/P(A) = (1/15)/(3/10) = 2/9$$

例2.1.1

（P57例1）
在肝癌普查中发现，某地区的自然人群中，每十万人中平均有40人患原发性肝癌，有34人甲胎球蛋白高含量，有32人同时发生肝癌和甲胎球蛋白高含量。以事件C表示患发性肝癌，以事件D表示患者甲胎球蛋白高含量。求$P(C|D)$及$P(D|C)$

2.例2.1.2

一项人口调查结果表明，深色眼睛的父亲和深色眼睛的儿子占被调查者的5%，深色眼睛的父亲和浅色眼睛的儿子占7.9%，浅色眼睛的父亲和深色眼睛的儿子占8.9%，浅色眼睛的父亲和浅色眼睛的儿子占78.2%，问父子的眼睛深浅色有无联系？

乘法公式及其应用

乘法公式：$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)\ldots P(A_n \mid A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

例2.1.3：
（波利亚罐子模型）罐子中有b只黑球及r只红球，随机取出一只，把原球放回，并加入与抽出球颜色相同的球c只再摸第二次，这样下去共摸了n次，问前面的n_1次都出现黑球，而后面$n_2 = n - n_1$次都出现红球的概率是多少？

例2.1.4（结绳问题） 将n根绳的$2n$个头任意两两相接，求事件$A=\{$恰结成n个圈$\}$的概率。

记$B_i=\{$第i次结成绳圈$\}$，则

$$A=\bigcap_{i=1}^{n}B_i$$

$$\mathbb{P}(B_1)=\frac{2n(2n-2)!}{(2n)!}=\frac{1}{2n-1}$$

$$\mathbb{P}(B_{k+1}|B_1\cdots B_k)=\frac{1}{2(n-k)-1}$$

由乘法公式

$$\mathbb{P}(A)=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2(n-k)-1}=\frac{1}{(2n-1)!!}$$

全概率公式

例2.1.5: 设10 件产品中有3 件不合格品，从中不放回地取两次，每次一件，求取出的第二件为不合格品的概率。

全概率公式： 若事件$B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$是样本空间$\Omega$的一组分割，且$P(B_i) > 0$,则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

解例2.1.5

解：设A = “第一次取得不合格品”，B = “第二次取得不合格品”.由全概率公式得:

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\bar{A})P(B \mid \bar{A})$$

$$= (3/10) \times (2/9) + (7/10) \times (3/9) = 3/10$$

注意

注意

- 全概率公式用于求复杂事件的概率.

注意

- 全概率公式用于求复杂事件的概率.
- 使用全概率公式关键在于寻找另一组事件来“分割”样本空间.

注意

- 全概率公式用于求复杂事件的概率.
- 使用全概率公式关键在于寻找另一组事件来“分割”样本空间.
- 全概率公式最简单的形式:

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(\bar{B})P(A \mid \bar{B})$$

摸彩模型

一：n 张彩票中有k 张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到奖券”，则：

$$P(A_i) = k/n, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

二：n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到中奖券”，则:

摸彩模型

一：n 张彩票中有k 张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到奖券”，则：

$$P(A_i) = k/n, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

二：n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到中奖券”，则：

- $P(A_1) = 1/n$

摸彩模型

一：n 张彩票中有k 张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到奖券”，则:

$$P(A_i) = k/n, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

二：n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到中奖券”，则:

- $P(A_1) = 1/n$
- 可用全概率公式计算得:$P(A_2) = 1/n$

摸彩模型

一：n 张彩票中有k 张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到奖券”，则：

$$P(A_i) = k/n, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

二：n 张彩票中有一张中奖，从中不返回地摸取，记A_i为“第i 次摸到中奖券”，则：

- $P(A_1) = 1/n$
- 可用全概率公式计算得:$P(A_2) = 1/n$
- 可用归纳法计算得:

$$P(A_i) = 1/n, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

例2.1.7（结绳问题：） 将n根绳的$2n$个头任意两两相接，求事件$A=\{恰结成n个圈\}$的概率。

解:

记

$$B=\{第一次结成绳圈\}$$

$$A_n=\{经过n次结绳结成n个绳圈\}$$

$$p_n=\mathbb{P}(A_n)$$

则由全概率公式

$$
\begin{aligned}
p_n &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_n|B) + \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(A_n|\bar{B}) \\
&= \frac{1}{2n-1} \cdot p_{n-1} + \mathbb{P}(\bar{B}) \cdot 0 \\
&= \frac{1}{2n-1} \cdot p_{n-1}, \quad n > 1
\end{aligned}
$$

递推可得

$$
p_n = \frac{1}{(2n-1)!!}
$$

这是例2.1.4的又一种解法，比较起来它更简单。

敏感性问题的调查

要调查“敏感性”问题中某种比例p；

两个问题：A：生日是否在7月1日前？

B:是否考试作弊？

抛硬币回答A或B.

答题纸上只有：“是”、“否”.

可用全概率公式分析“敏感性”问题.

贝叶斯（Bayes）公式

贝叶斯（Bayes）公式

- 已知“结果”，求“原因”
  例：某人从甲地到乙地，乘飞机、火车、汽车迟到的概率分别为0.1、0.2、0.3，他等可能地选择这三种交通工具。若已知他最后迟到了，求他分别是乘飞机、火车、汽车的概率

贝叶斯（Bayes）公式

- 已知“结果”，求“原因”
  例：某人从甲地到乙地，乘飞机、火车、汽车迟到的概率分别为0.1、0.2、0.3，他等可能地选择这三种交通工具。若已知他最后迟到了，求他分别是乘飞机、火车、汽车的概率
- 核心公式：若事件$B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$是样本空间$\Omega$ 的一组分割，且$P(A) > 0, P(B_i) > 0$,则

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}$$

$$i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

注意

1) $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$可以看作是导致A发生的原因;

2) $P(B_j \mid A)$是在事件A发生的条件下，某个原因B_j发生的概率，称为“后验概率”；

3) Bayes公式又称为“后验概率公式”或“逆概公式”；

4) 称$P(B_j)$为“先验概率”.

敏感性问题的调查

目的：要调查“敏感性”问题中某种比例p；

问卷设计：回答如下两个两个问题:
A: 生日是否在7月1日前？；
B:是否考试作弊？

回答问题的方法:
抛一枚均匀硬币出正面回答问题A，出反面回答问题B.

答题纸上只有：“是”、“否”.

设A表示随机事件“答题纸上回答的是‘是’”；B表示随机事件“回答问题A”则由全概率公式:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(A|\overline{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p$$

说谎的孩子

有一个小孩每天到山上去放羊，山里时常有狼出没。有一天小孩在山上喊："狼来了！狼来了！"山下的村民闻声赶来打狼，却跑了一场空，放羊的孩子感到很可笑，那么多人都上了自己的当，他和高兴。第二天仍然如此；第三天，当狼真的来了的时候，可是无论放羊的孩子怎样叫喊，也没人来救他。

现在用贝叶斯公式来分析这个故事中村民对放羊的孩子的诚实性的判断或者说村民的心理活动。设事件F表示放羊的孩子说的是谎话，事件$\overline{F}$ 表示放羊的孩子说的是真话，事件W表示狼真的来了，事件$\overline{W}$ 表示狼没来。

首先假设村民们对放羊的孩子的印象一般，即假定:

$$\mathbb{P}(F) = P(\overline{F}) = 1/2$$

再假定说谎话的孩子喊狼来了时，狼真的来了的概率为1/3，说真话的孩子喊狼来了时，狼真的来了的概率为3/4，即:

$$\mathbb{P}(W|F) = 1/3, \quad \mathbb{P}(W|\overline{F}) = 3/4$$

当孩子第一次说谎的时候，由Bayes公式可计算出在发现孩子说谎时，人们对孩子是否说谎的重新认识:

$$\mathbb{P}(F|\overline{W}) = \frac{\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(\overline{W}|F)}{\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(\overline{W}|F) + \mathbb{P}(\overline{F})\mathbb{P}(\overline{W}|\overline{F})}$$

$$= \frac{1/2 \times 2/3}{1/2 \times 2/3 + 1/2 \times 1/4} = 8/11$$

同时可计算出这时村民认为放羊孩子不说谎的概率:

$$\mathbb{P}(\overline{F}|\overline{W}) = 1 - 8/11 = 3/11$$

这表明村民认为放羊孩子说谎的概率由0.5调整到0.7273，从而改写了原来的先验概率:

$$\mathbb{P}(F) = 8/11, \qquad \mathbb{P}(\overline{F}) = 3/11$$

当孩子第二次说谎时，这时村民再一次调整对放羊孩子说谎的认识，再次利用Bayes公式:

$$\mathbb{P}(F|\overline{W}) = \frac{\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(\overline{W}|F)}{\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(\overline{W}|F) + \mathbb{P}(\overline{F})\mathbb{P}(\overline{W}|\overline{F})}$$

$$= \frac{8/11 \times 2/3}{8/11 \times 2/3 + 3/11 \times 1/4} = 0.8767$$

例2.1.8

某商品由三个厂家供应，其供应量为：甲厂家是乙厂家的2倍；乙、丙两厂相等。各厂产品的次品率为2%, 2%, 4%. 若从市场上随机抽取一件此种商品，发现是次品，求各厂应该承担的责任各是多少？

例2.1.9

解：用1、2、3分别记甲、乙、丙厂，设A_i= “取到第i 个工厂的产品”，B= “取到次品”，
由题意得: $\mathbb{P}(A_1)=0.5$, $\mathbb{P}(A_2)=\mathbb{P}(A_3)=0.25$；
$\mathbb{P}(B \mid A_1)=\mathbb{P}(B \mid A_2)=0.02$, $\mathbb{P}(B \mid A_3)=0.04$
由Bayes公式得:

$$\mathbb{P}(A_1 \mid B)=\frac{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B \mid A_1)}{\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i)}=0.4$$

思考题一：（玛丽莲问题The Monty Hall Problem）：在三扇门后面分别藏有两只羊和一辆轿车。参与游戏的参与者可以先按自己的意愿选择一扇门，而游戏的操纵者则打开另外两扇门中的一扇门发现有羊，此时游戏的参与者还有一次重新选择的机会，即可以选择另外一扇未被打开的门。问游戏的参与者应该不应该重新选择？为什么？

思考题二： （仅靠血型做亲子鉴定）假设在一个家庭中，母亲的血型是A型，儿子的血型是B型，另一人张三血型为B型，问张三是该儿子真正父亲的概率有多大？

$$\begin{pmatrix} \text{血型（phenotype）} & O & A & A & B & B & AB \\ \text{基因型（genotype）} & OO & AO & AA & BO & BB & AB \\ \text{百分比} & 0.479 & 0.310 & 0.05 & 0.116 & 0.007 & 0.038 \end{pmatrix}$$

事件的独立性

直观说法：对于两事件，若其中任何一个事件的发生不影响另一个事件的发生，则这两事件是独立的.

$$\iff \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(B) > 0$$

$$\iff \mathbb{P}(AB)/\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(B) > 0$$

$$\iff \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

两事件的独立性

定义：称事件A、B是相互独立(Independent)的，如果，

$$\mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

两事件的独立性

定义： 称事件A、B是相互独立(Independent)的，如果，

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- 推论1：A、B 为两个事件，若$\mathbb{P}(A) > 0$,则A 与B 独立等价于$\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$；若$\mathbb{P}(B) > 0$,则A 与B 独立等价于$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$

两事件的独立性

定义：称事件A、B是相互独立(Independent)的，如果，

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- 推论1：A、B 为两个事件，若$\mathbb{P}(A) > 0$,则A 与B 独立等价于$\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$；若$\mathbb{P}(B) > 0$,则A 与B 独立等价于$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$
- 推论2：若事件A与B独立，则
A 与$\overline{B}$独立、$\overline{A}$与B独立、$\overline{A}$与$\overline{B}$独立.

问题：为什么不用条件概率

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \text{ 或} \mathbb{P}(B|\bar{A}) = \mathbb{P}(B)$$

作为A与B相互独立的定义?

例2.2.1： 袋中有r个红球与b个黑球，从中依次任取2个球。
令$R_i = \{$第i次取出的是红球$\}$，问
(a)在放回情况下R_1与R_2是否相互独立?
(b)在无放回情况下R_1与R_2是否相互独立?

解:

在两种情况下都有

$$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2) = \frac{r}{r+b}$$

(a)在放回情况下,

$$\mathbb{P}(R_1R_2) = \left(\frac{r}{r+b}\right)^2$$

此时R_1与R_2相互独立;

(b)在无放回情况下,

$$\mathbb{P}(R_1R_2) = \frac{r(r-1)}{(r+b)(r+b-1)}$$

此时R_1与R_2不相互独立。

注:

两个事件相互独立的概念是通过概率来定义的。因此，可能会出现两个不同的概率空间

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ 和 } (\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}}),$$

使得

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

但

$$\tilde{\mathbb{P}}(AB) \neq \tilde{\mathbb{P}}(A)\tilde{\mathbb{P}}(B)$$

的情况，即A和B在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上相互独立，但是在$(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$上不相互独立。

例2.2.1：

向区间$[0,1]$内任投一点，用事件A表示点落在区间$\left[0,\frac{1}{2}\right)$内，而事件$B$表示点落在区间$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$内，问$A$与$B$是否相互独立？

解： 显然

$$\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathbb{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathbb{P}(AB)=\frac{1}{4}$$

所以A与B相互独立。

注： A与B相互独立与A与B互不相容是两个不同的概念。上面的例子是一个很好的反例。进一步的问题：试讨论这两个概念之间的关系。

三个事件的独立性

定义：对三个事件A、B、C，如果以下四个等式同时成立：

(1) $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

(2) $\mathbb{P}(AC) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$

(3) $\mathbb{P}(BC) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

(4) $\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

则称事件A、B、C相互独立。

注： 如果在上述定义中，只有：(1) $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

(2) $\mathbb{P}(AC) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$

(3) $\mathbb{P}(BC) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

我们则称三事件A, B, C两两相互独立。
显然， A, B, C相互独立$\Longrightarrow$ A, B, C两两相互独立；但反过来却不对。

反例：

有一个均匀正四面体，其中的三个面分别只涂上红、黄和蓝色，在剩下的一个面上同时涂有红、黄和蓝三色。掷此四面体落地后，事件A表示四面体的底面有红色，事件B表示四面体的底面有黄色，事件C表示四面体的底面有蓝色。试证明A、B和C两两独立，但不相互独立。

解:

显然

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(AC) = \mathbb{P}(BC) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(ABC) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(AC) = \mathbb{P}(BC) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(ABC) = \frac{1}{4}$$

故

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(AC) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(BC) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(ABC) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

即A、B和C两两独立，但不相互独立。

n个事件的独立性

一般，对n 个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$如果下列$2^n - n - 1$个等式成立：

$$
\begin{cases}
\mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \mathbb{P}(A_{i_2}) \\
\qquad\qquad 1 \le i_1 < i_2 \le n \\
\qquad \vdots \\
\mathbb{P}(A_{i_1} \cdots A_{i_s}) = \prod_{k=1}^{s} \mathbb{P}(A_{i_k}) \\
\qquad\qquad 1 \le i_1 < \cdots < i_s \le n \\
\qquad \vdots \\
\mathbb{P}(A_1 \cdots A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)
\end{cases}
$$

特别，如果仅等式

$$\mathbb{P}(A_iA_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j), \quad 1 \le i < j \le n$$

成立则称事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$是两两相互独立的。最后，称无穷多个事件是相互独立的，其如果其中任意有限多个事件都是相互独立的。

独立性在概率计算中的应用

例2.2.2　两射手轮流对同一目标进行射击，甲先射，谁先击中则得胜。每次射击中，甲、乙命中目标的概率分别为α 和β ，求甲得胜的概率。

解:
因为

$$\mathbb{P}(\text{甲胜}) = \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\alpha + \cdots$$

所以

$$\mathbb{P}(\text{甲胜}) = \alpha/[1-(1-\alpha)(1-\beta)].$$

独立性在概率计算中的应用

（i）若$A_1, \cdots, A_n$相互独立，则乘法公式可以简化为：

$$\mathbb{P}(A_1 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n)$$

（ii）加法公式可以简化为:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i))$$

（iii）一个小概率事件，在独立多次重复观察中必然发生。

系统的可靠性

元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记$A_i =$ “第i个元件正常工作”，$p_i = P(A_i)$:

系统的可靠性

元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记$A_i =$ “第i个元件正常工作”，$p_i = P(A_i)$:

- 两个元件的串联系统:$P(A_1A_2) = p_1p_2$

系统的可靠性

元件工作独立，求系统正常工作的概率. 记$A_i =$ “第i个元件正常工作”，$p_i = P(A_i)$:

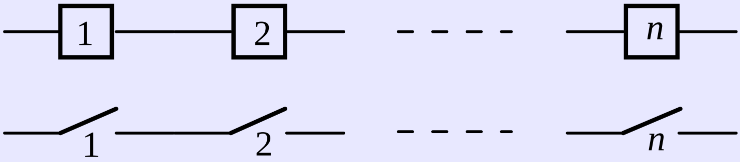
- 两个元件的串联系统:$P(A_1A_2) = p_1p_2$
- 两个元件的并联系统:

$$P(A_1 \cup A_2) = p_1 + p_2 - p_1p_2 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$$

系统的可靠性

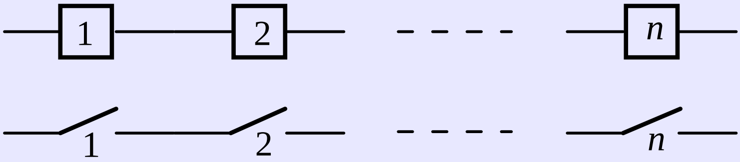
系统的可靠性

- n个元件的串联系统:

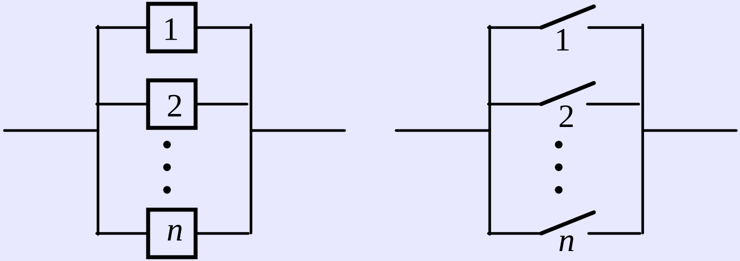


系统的可靠性

- n个元件的串联系统:



- n个元件的并联系统:



系统的可靠性

下假定系统的各个部件能否正常工作是相互独立的，第i个部件正常工作的概率为

$$p_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

如果系统是由n个部件串联所组成，则其可靠性

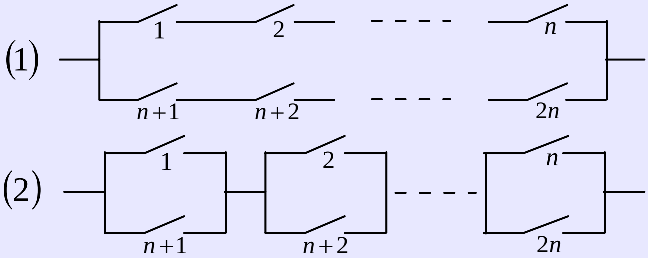
$$R_c = p_1 \cdots p_n$$

如果系统是由n个部件并联所组成，则其可靠性

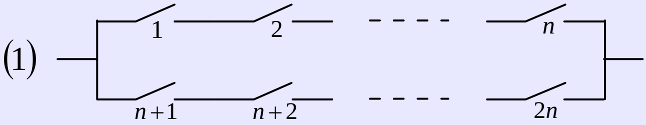
$$R_c = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)$$

系统的可靠性

求如下二电路系统的可靠性:

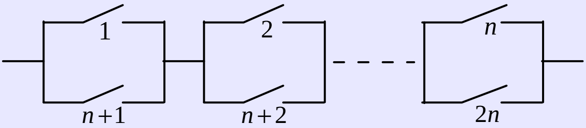


用A_i表示第i个开关接通，则
$\mathbb{P}(A_i) = p$。



此时

$$R_1 = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i=n+1}^{2n} A_i\right)\right) = 1 - (1 - p^n)^2$$

(2) 

此时

$$R_2 = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cup A_{n+i})\right) = (1-(1-p)^2)^n = p^n(2-p)^n$$

哪个电路系统更可靠？R_1，R_2哪个大？

试验独立性的定义

若试验E_1的任一结果与试验E_2的任一结果都是相互独立的事件，则称这两个试验相互独立，或称独立试验.

n 重伯努里试验

n 重伯努里试验

- 伯努里试验:
  若某种试验只有两个结果(成功、失败; 黑球、白球; 正面、反面), 则称这个试验为伯努里试验.

n 重伯努里试验

- 伯努里试验:
  若某种试验只有两个结果(成功、失败; 黑球、白球; 正面、反面), 则称这个试验为伯努里试验.
- 在伯努里试验中, 一般记“成功”的概率为p.

n 重伯努里试验

- 伯努里试验:
  若某种试验只有两个结果(成功、失败; 黑球、白球; 正面、反面), 则称这个试验为伯努里试验.
- 在伯努里试验中, 一般记“成功”的概率为p.
- n 重伯努里试验:
  n次独立重复的伯努里试验

n 重伯努里试验成功的次数

n 重伯努里试验成功的次数

- 在n 重伯努里试验中，记成功的次数为X.

n 重伯努里试验成功的次数

- 在n 重伯努里试验中，记成功的次数为X.
- X 的可能取值为：$0, 1, \ldots \ldots, n$

n 重伯努里试验成功的次数

- 在n 重伯努里试验中，记成功的次数为X.
- X 的可能取值为：$0, 1, \ldots\ \ldots, n$
- X 取值为k 的概率为:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

例2.2.2

在抽检产品时，抽查了200件产品，检查结果发现其中有4件是废品，问能否相信该厂产品废品率不超过0.005

解:

假设该厂产品的废品率为0.005，容易算得200件中出现4件废品的概率为

$$C^4{}_{200} \times 0.005^4 \times (1-0.005)^{196} \simeq 0.015$$

根据人们长期实践总结出的一条原理：概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不可能发生的，现在，可以认为当废品率为0.005时，抽检200件产品出现4件废品是一概率很小的事件，而它在一次试验中就发生了，因此有理由怀疑假定的正确性，即工厂产品废品率不超过0.005不可信。

主要思想：概率反证法