

05级计算机《离散数学》期中考试试卷

南京大学计算机科学与技术系

Apr. 21, 2006

1 15pts

A, B, C 为任意集合。判断下列等式是否成立，给出证明或给出反例：

1. $C \cap (A \oplus B) = (C \cap A) \oplus (C \cap B)$
2. $C \cup (A \oplus B) = (C \cup A) \oplus (C \cup B)$

2 15pts

\mathbb{N} 是自然数集。在 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上定义关系 R 如下：

$$\langle j, k \rangle R \langle m, n \rangle \text{ 当且仅当 } \max(j, k) = \max(m, n)$$

1. 证明 R 是等价关系。
2. 写出其等价类的一般形式。
3. 是否存在两个不同的等价类等势？说出理由。
4. 证明： $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/R$ 与自然数集等势。

3 15pts

X 是至少含两个元素的集合。 $X' = \rho(X) - \{\emptyset\} - \{X\}$ 。

1. 偏序集 (X', \subseteq) 是否有最大元，最小元？
2. 求：偏序集 (X', \subseteq) 的所有极小元的集合 X_{\min} ，所有极大元的集合 X_{\max} 。
3. 证明： X_{\min} 与 X 等势。

4 15pts

给定函数 $f: A \rightarrow B$ ，若 $Y \subseteq B$ ，定义 $f^1(Y) = \{x \mid x \in A, f(x) \in Y\}$ 。证明：对 B 的任意非空子集 Y ， $f^1(Y)$ 非空的充分必要条件是 f 是满射。

5 15pts

证明：随于任意正整数 n ，模 n 的整数加群 $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ 是整数加群 $(\mathbb{Z}, +)$ 的商群。

6 15pts

G 是奇数阶有限群。证明：对任意 $x \in G$ ，存在唯一的 $y \in G$ ，满足： $x = y^2$ 。

7 10pts

用 1, 2, 3 三个数字组成 $n(n \geq 3)$ 位数，数字可以重复，且在每个 n 位数中每个数字至少出现一次。利用容斥原理求满足上述条件的 n 位数有多少个。